Let us notice the following properties of the space X:

(4) *$O(x)$ is open and closed for every x,*

(5) *$Y=\overline{Y}$ for every $Y\subset\Re_1$,*

(6) *N is dense in X,*

(7) *X satisfies the first axiom of countability.*

The complete regularity of X follows from (4). It follows from (1) and (5) that X is non-compact.

(8) *N is compact relatively to X.*

Let f be a real-valued continuous mapping of X. As N is dense in X and compact relatively to X, it follows at once that the set $f(X)$ is bounded.

Remark. The following statements are true:

1. Let T be a topological space satisfying the first axiom of countability and let $f\in T^X$ (*i. e.* f is a continuous mapping of X into T). Then $f(X)$ is closed in T.

2. If T satisfies the first axiom of countability and is compact and $f\in T^X$, then $f(X)$ is compact.

3. If T is a metric space and $f\in T^X$, then $f(X)$ is compact.

Reçu par la Rédaction le 15. 10. 1953

Fonctions rationnelles qui sont homotopes à des fonctions biunivoques sur certains sous-ensembles du plan

par

K. Kuratowski (Warszawa)

Désignons par $\mathcal{S}_2$ le plan des nombres complexes, le point à l'infini y compris, et par $\mathcal{P}$ le plan des nombres complexes finis diminué du point 0. Étant donnés un ensemble $A\subset\mathcal{S}_2$ et une fonction continue f définie sur A, à valeurs complexes et telle que

(1) $$0\neq f(z)\neq\infty,$$

nous écrirons, comme d'habitude, $f\in\mathcal{P}^A$.

Soit, en outre, $g\in\mathcal{P}^A$. On dit que les fonctions f et g sont homotopes (relativement à $\mathcal{P}$), en symbole

(2) $$f\sim g,$$

lorsqu'il existe une déformation continue $h(z,t)$, où $z\in A$ et $0\leqslant t\leqslant 1$, telle que

(3) $$h(z,0)=f(z),\qquad h(z,1)=g(z),\qquad h(z,t)\in\mathcal{P},$$

quels que soient z et t.

D'après un théorème de S. Eilenberg [1]), la relation (2) équivaut à l'existence d'une fonction continue $u(z)$ définie sur A et telle que

(4) $$f(z)=g(z)e^{u(z)}\quad\text{pour}\quad z\in A.$$

Dans le N°2 nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Soient A un sous-ensemble localement connexe [2]) du plan $\mathcal{S}_2$ et $p_0,\dots,p_n$ un système de points situés en dehors de A et tels que A coupe [3]) le plan entre tout couple p_i,p_j pour $i\neq j$.*

Si la fonction rationnelle [4])

(5) $$r(z)=(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n},$$

---

[1]) Voir [1], p. 68 ou [3], p. 388.

[2]) Un espace est dit *localement connexe* lorsqu'à tout point correspond un entourage connexe aussi petit qu'on le veut. Rappelons que la connexité locale d'un continu C équivaut à l'existence d'une représentation paramétrique continue de C sur l'intervalle.

[3]) Un ensemble *coupe* l'espace entre les points p et q lorsque tout continu qui contient ces points admet au moins un point en commun avec cet ensemble.

[4]) Il peut arriver, bien entendu, que l'un des points p_j soit point à l'infini. Nous convenons que $z-\infty\equiv 1$.

où

(6) $$k_0+\ldots+k_n=0$$

et

(7) $$k_j\neq 0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant j\leqslant n,$$

est homotope sur A à une homéomorphie $f\in\mathcal{P}^A$, on a l'inégalité

(8) $$|k_0|+\ldots+|k_n|\leqslant 2n.$$

Dans le N°3 nous allons envisager un problème, dans un certain sens inverse; nous y établirons deux théorèmes:

THÉORÈME II. *Étant donnés: un système de points (distincts) $p_0,\ldots,p_n$ et un système d'entiers $k_0,\ldots,k_n$ satisfaisant aux conditions* (6)-(8), *il existe: un continu A somme de n courbes simples fermées qui coupe le plan entre tout couple de points p_i, p_j (où $i\neq j$), ainsi qu'une homéomorphie $f\in\mathcal{P}^A$ qui est homotope à la fonction rationnelle r définie par la formule* (5).

THÉORÈME III. *Le théorème* II *reste vrai en remplaçant les termes „continu A somme de n courbes simples fermées" par „ensemble ouvert G somme de n régions homéomorphes à des anneaux circulaires".*

Dans le N°4 nous déduirons quelques conséquences du théorème I, en l'appliquant aux fonctions $f\in\mathcal{P}^A$ qui sont homotopes à des fonctions rationnelles. Nous allons compléter à ce but notre connaissance des fonctions de ce genre (théorème IV et corollaire II).

1. Préliminaires[5]). Soit A un sous-ensemble arbitraire du plan $\mathcal{S}_2$.

1. *Si l'ensemble A ne coupe pas le plan entre les points p et q* (autrement dit: *si ces points appartiennent au même constituant*[6]) *de l'ensemble $\mathcal{S}_2-A$), on a*

(9) $$\frac{z-p}{z-q}\sim 1 \quad \text{sur} \quad A\ ^{7)}.$$

Réciproquement:

2. *Si l'ensemble A coupe le plan entre les points p et q (qui ne lui appartiennent pas), la relation* (9) *est en défaut.*

---

[5]) Cf. [1] ou [3], § 55, II.

[6]) On appelle *constituant* du point p dans l'ensemble A l'ensemble-somme de tous les sous-continus de A qui contiennent ce point.

En remplaçant, dans cette définition, les termes *sous-continus de A* par *sous-ensembles connexes de A*, on définit la *composante* de A qui contient p.

Rappelons que, dans le cas où A est soit un sous-ensemble fermé, soit un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$ (ou, plus généralement, d'un espace localement connexe), ses constituants coïncident avec ses composantes.

[7]) L'unité désigne dans cette formule la fonction $f(z)\equiv 1$.

D'une façon plus précise:

3. *Si l'ensemble A coupe le plan entre tout couple des points $p_0,\ldots,p_n$ (situés dans $\mathcal{S}_2-A$), les conditions*

$$(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}\sim 1$$

et

$$k_0+\ldots+k_n=0$$

entraînent: $k_0=0,\ldots,k_n=0$.

Il en résulte, en particulier, que *la relation*

$$(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}\sim(z-p_0)^{m_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{m_n},$$

où $m_0+\ldots+m_n=0$, entraîne $m_0=k_0,\ldots,m_n=k_n$.

Le théorème 1 implique les suivants:

4. *En remplaçant dans une fonction rationnelle un zéro (ou un pôle) p par un point q tel que l'ensemble A ne coupe pas le plan entre p et q, on obtient une fonction qui est homotope sur A à la fonction donnée.*

Autrement dit, *si q_j appartient au même constituant de $\mathcal{S}_2-A$ que p_j (pour $j=0,\ldots,n$), on a*

(10) $$(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}\sim(z-q_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-q_n)^{k_n} \quad \text{sur} \quad A.$$

5. *Toute fonction rationnelle est homotope sur A à une fonction rationnelle dont les zéros et pôles appartiennent à des constituants de $\mathcal{S}_2-A$, distincts deux à deux.*

Rapproché de 4, l'énoncé 3 implique que:

6. *Si l'on a*

(11) $$(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}\sim(z-q_0)^{s_0}\cdot\ldots\cdot(z-q_v)^{s_v} \quad \text{sur} \quad A,$$

si les points $p_0,\ldots,p_n$ appartiennent à des constituants $C_0,\ldots,C_n$ de $\mathcal{S}_2-A$, distincts deux à deux, si en outre les points $q_0,\ldots,q_w$ appartiennent au constituant C_0, tandis qu'aucun q_i avec $i>w$ ne lui appartient pas, alors

(12) $$k_0=s_0+\ldots+s_w.$$

Pour une simple démonstration, voir [3], p. 393, 2.

7. *En admettant que la relation* (11) *est réalisée, que les exposants k_j et s_i satisfont aux conditions* (6) *et* (7) *et que chacun des deux systèmes: $(p_0,\ldots,p_n)$ et $(q_0,\ldots,q_v)$ est composé de points entre lesquels A coupe le plan, on a $n=v$ et les systèmes $(k_0,\ldots,k_n)$ et $(s_0,\ldots,s_v)$ sont identiques, abstraction faite de leur ordre.*

En effet, il est légitime d'admettre que les deux points p_j et q_j pour $j\leqslant r$ appartiennent au même constituant de $\mathcal{S}_2-A$, tandis que tous les points p_i avec $r<i\leqslant n$ et q_t avec $r<t\leqslant v$ appartiennent à des constituants différents. Nous allons prouver que $n=r=v$.

On a d'après 1 et (11)

$$(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}(z-q_{r+1})^0\cdot\ldots\cdot(z-q_v)^0\sim$$
$$\sim(z-q_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-q_r)^{k_r}(z-p_{r+1})^{k_{r+1}}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}(z-q_{r+1})^0\cdot\ldots\cdot(z-q_v)^0$$
$$\sim(z-q_0)^{s_0}\cdot\ldots\cdot(z-q_r)^{s_r}(z-p_{r+1})^0\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^0(z-q_{r+1})^{s_{r+1}}\cdot\ldots\cdot(z-q_v)^{s_v},$$

d'où (selon 6) $k_0=s_0,\ldots,k_r=s_r$, tandis que pour $i>r$ on a $k_i=0=s_i$. Mais cela n'est compatible avec (7) que lorsque $n=r=v$.

8. *Soit C une courbe simple fermée qui coupe le plan $\mathcal{S}_2$ entre les points p et q et soit $f\in\mathcal{P}^C$ une homéomorphie. On a alors*

$$f(z)\sim(z-p)^k(z-q)^{-k}\quad \text{où}\quad |k|\leqslant 1. \tag{13}$$

Dans le cas où la courbe C ne contient pas le point à l'infini, on a l'énoncé plus précis suivant.

Si le point 0 appartient à la composante non-bornée de $\mathcal{S}_2-f(C)$, on a $k=0$; s'il appartient à la composante bornée et si p appartient à la composante bornée de $\mathcal{S}_2-C$, on a $k=\pm1$ (suivant que la transformation f altère ou n'altère pas l'orientation de la courbe C) [8].

2. Démonstration du Théorème I [9]. Les fonctions f et r étant homotopes par hypothèse, on a d'après (4)

$$f(z)=e^{u(z)}(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}\quad\text{pour}\quad z\in A, \tag{14}$$

où u est une fonction continue. Il est légitime d'admettre que la fonction u est définie sur un ensemble B de classe G_δ contenant A [10].

D'après un théorème de Lavrentieff [11], il existe un ensemble C de classe G_δ tel que $A\subset C\subset B$ et que le membre droit de l'égalité (14) est une homéomorphie sur C.

Posons [12])

$$Z=C\cdot L(A)-(p_0,\ldots,p_n) \tag{15}$$

et

$$g(z)=e^{u(z)}(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}\quad\text{pour}\quad z\in Z. \tag{16}$$

[8]) Voir [3], p. 432 et [4], p. 10.

[9]) La démonstration pour le cas particulier où A est un continu localement connexe a été donnée dans la note [4].

[10]) Voir [2], p. 328.

[11]) Voir [5], p. 149 ou [2], p. 335.

[12]) On désigne (avec S. Eilenberg) par $L(A)$ l'ensemble des $x\in\bar{A}$ pour lesquels il existe des ensembles ouverts G de diamètre aussi petit que l'on veut et tels que $x\in G$ et que GA est connexe.

Rappelons (cf. [3], p. 168) que

1° $L(A)$ est un ensemble G_δ,

2° si $A\subset X\subset L(A)$, X est localement connexe.

Comme localement connexe et comme ensemble G_δ, l'ensemble Z est localement et intégralement connexe par arcs (d'après un théorème de Mazurkiewicz-Menger-Moore) [13]).

Il en résulte qu'à tout couple de points p, q entre lesquels l'ensemble Z coupe le plan correspond une courbe simple fermée contenue dans Z et qui coupe le plan entre ces points [14]).

Nous allons distinguer deux cas:

1° Pour tout indice j, sauf, peut-être, pour un seul (nommons-le n), il existe une courbe simple fermée $K_j\subset Z$ qui coupe le plan entre le point p_j et tous les points p_i avec $i\neq j$. L'ensemble $\mathcal{S}_2-K_j$ étant formé de deux composantes, dont l'une contient le point p_j et l'autre — le point p_n (ainsi que tous les points p_i avec $i\neq j$), il vient d'après le théorème 6 du N°1 et d'après la formule (16)

$$g(z)\sim(z-p_j)^{k_j}(z-p_n)^{k_0+\ldots+k_{j-1}+k_{j+1}+\ldots+k_n}\quad\text{pour}\quad z\in K_j.$$

Donc, d'après (13),

$$|k_j|=1\quad\text{pour}\quad 0\leqslant j<n \tag{17}$$

et, d'après (6),

$$|k_n|=|k_0+\ldots+k_{n-1}|\leqslant n. \tag{18}$$

Les formules (17) et (18) donnent aussitôt l'inégalité (8).

Ainsi, dans le cas 1°, le théorème se trouve établi.

Il en résulte, en particulier, que pour $n=1$ le théorème est vrai.

2° Admettons que le cas 1° ne soit pas réalisé. Il existe donc deux indices — les indices 0 et n, par exemple — tels que, K étant une courbe simple fermée contenue dans Z, qui coupe le plan entre p_0 et p_n, chacune des deux composantes D et E de $\mathcal{S}_2-K$ contient tout au moins deux points du système $p_0,\ldots,p_n$. Il est donc légitime d'admettre (en numérotant les points $p_1,\ldots,p_{n-1}$ de façon convenable) que

$$p_0,\ldots,p_r\in D, \tag{19}$$
$$p_{r+1},\ldots,p_n\in E, \tag{20}$$
$$1\leqslant r\leqslant n-2. \tag{21}$$

Posons $M=Z\cdot\bar{D}$ et $N=Z\cdot\bar{E}$. Il vient

$$M+N=Z\quad\text{et}\quad MN=K.$$

M et N sont donc deux ensembles fermés dans Z, dont la somme et le produit sont des ensembles localement connexes. Il en résulte [15]) que les ensembles M et N sont aussi localement connexes.

[13]) Voir [3], p. 184.

[14]) Cf. [3], p. 405, 2.

[15]) Cf. [3], p. 164, 10.

En outre, l'ensemble M coupe le plan entre tout couple extrait du système $p_0,\dots,p_r,p_n$. En effet, d'après (19) et (20), K, donc M, coupe le plan entre p_n et p_j pour $j\leqslant r$; d'autre part, en supposant que M ne coupe pas le plan, par exemple, entre p_0 et p_1, il existerait un continu Q tel que

$$p_0,p_1\in Q\subset \mathcal{S}_2-M,$$

d'où $Q\subset\mathcal{S}_2-K$, donc selon (19) $Q\subset D$ et $Q\overline{E}=0$. Mais alors

$$QZ=QZ\overline{D}+QZ\overline{E}=QM=0,$$

ce qui est impossible, puisque A, donc Z, coupe le plan entre p_0 et p_1.

Il vient d'après (16), (20) et le théorème 6 du N°1

(22) $$g(z)\sim(z-p_0)^{k_0}\dots(z-p_r)^{k_r}(z-p_n)^{k_{r+1}+\dots+k_n}\qquad\text{pour}\quad z\in M$$

et d'une façon analogue (en vertu de (19))

(23) $$g(z)\sim(z-p_0)^{k_0+\dots+k_r}(z-p_{r+1})^{k_{r+1}}\dots(z-p_n)^{k_n}\qquad\text{pour}\quad z\in N.$$

D'autre part, il vient d'après (13) pour $z\in K$

(24) $$f(z)\sim(z-p_0)^{k}(z-p_n)^{-k}$$

où

(25) $$|k|\leqslant 1,$$

et on déduit de (19) et (20), en vertu du théorème 6 du N°1, que

(26) $$k_0+\dots+k_r=k\quad\text{et}\quad k_{r+1}+\dots+k_n=-k.$$

Procédons à présent par induction. Le théorème étant vrai pour $n=1$, admettons qu'il soit vrai pour tout $s<n$ (donc — selon (21) — pour $s=r+1$ et pour $s=n-r$).

Conformément à (25), il y a deux cas à distinguer suivant que $k=0$ ou bien $|k|=1$.

Dans le premier cas, on déduit par hypothèse des formules (22), (23) et (26) que

(27) $$|k_0|+\dots+|k_r|\leqslant 2r$$

et

(28) $$|k_{r+1}|+\dots+|k_n|\leqslant 2(n-r-1).$$

La formule (8) est alors évidemment réalisée.

D'une façon analogue, on a dans le cas où $|k|=1$,

(29) $$|k_0|+\dots+|k_r|+1\leqslant 2(r+1)$$

et

(30) $$1+|k_{r+1}|+\dots+|k_n|\leqslant 2(n-r),$$

d'où l'inégalité (8).

Complément au Théorème I. Dans le cas où A est un ensemble localement connexe fermé, on peut — au lieu de supposer que f est une homéomorphie sur l'ensemble A tout entier — admettre que f est une fonction continue sur A et — une homéomorphie sur la frontière $\mathrm{Fr}(A)$ de A.

En effet, comme localement connexe et fermé, A est somme d'un nombre fini de continus localement connexes $C_1,\dots,C_m$ disjoints. L'ensemble A étant une coupure entre p_i et p_j, l'un de ces continus l'est également[16]). Tout se réduit donc à démontrer que C étant un continu localement connexe qui coupe le plan entre p et q, la frontière de C contient une courbe simple fermée K qui coupe également le plan entre p et q.

Désignons par P la composante du point p dans $\mathcal{S}_2-C$, et par Q celle du point q dans $\mathcal{S}_2-\overline{P}$. On a donc[17])

$$\mathrm{Fr}(Q)\subset\mathrm{Fr}(\overline{P})=\overline{P}\cdot\overline{\mathcal{S}_2-\overline{P}}\subset\overline{P}-P=\mathrm{Fr}(P)\subset\mathrm{Fr}(C).$$

En outre, $\mathrm{Fr}(Q)$ est une courbe simple fermée[18]) qui coupe évidemment le plan entre p et q.

3. Avant d'aborder la démonstration du théorème II, nous allons démontrer au préalable le lemme arithmétique suivant:

LEMME. *Étant donné un système d'entiers $k_0,\dots,k_n$ (où $n\geqslant 2$) satisfaisant aux conditions* (6)-(8), *il existe un indice j, par exemple $j=n$, et un autre indice i, par exemple $i=n-1$, tels que*

(31) $$|k_n|=1,$$

(32) $$k_{n-1}+k_n\neq 0,$$

(33) $$|k_0|+\dots+|k_{n-2}|+|k_{n-1}+k_n|\leqslant 2(n-1).$$

Démonstration. L'existence d'un indice j tel que $|k_j|=1$ suit aussitôt des conditions (7) et (8).

Il est donc légitime d'admettre que $k_n=1$. Il est aussi légitime d'admettre qu'il existe un indice i, par exemple $i=n-1$, tel que $k_{n-1}<-1$. Car, en supposant que tous les k_i négatifs sont égaux à -1, leur nombre serait $\leqslant n-1$ (d'après (6)) et l'on aurait

$$|k_0|+\dots+|k_n|\leqslant 2(n-1),$$

d'où suivrait l'inégalité (33).

---

[16]) Voir [3], p. 334, 3. C'est une conséquence de l'unicohérence du plan $\mathcal{S}_2$.

[17]) La frontière d'une composante d'un ensemble A (situé dans un espace localement connexe) est contenue dans la frontière de A (donc dans la frontière du complémentaire de A).

[18]) L'ensemble $\mathrm{Fr}(Q)$, comme séparateur irréductible du plan entre p et q (cf. [3], p. 175, 2) et comme ensemble localement connexe (cf. ibid., p. 360, 4 (i)), est une courbe simple fermée (cf. ibid. p. 356, 8).

Posons donc $k_{n-1}<-1$. Il vient
$$|k_{n-1}+k_n|=|k_{n-1}|-1,$$
d'où (32) et (33), puisqu'en vertu de (8) et (31)
$$|k_0|+\ldots+|k_{n-1}|+1\leqslant 2n.$$

Démonstration du Théorème II. Nous allons procéder par induction en démontrant la prémisse suivante, plus générale que le théorème II: étant donnés un système d'entiers $k_0,\ldots,k_n$ satisfaisant aux conditions (6)-(8) et un système de continus disjoints $P_0,\ldots,P_n$ dont aucun ne coupe le plan, il existe:

1° un continu C_n qui coupe le plan en $n+1$ régions contenant respectivement les continus $P_0,\ldots,P_n$ et qui est de la forme (cf. Fig. 2)
$$C_n=K_1+\ldots+K_n, \tag{34}$$
où K_j est une courbe simple fermée (pour $j=1,\ldots,n$) et où
$$K_iK_j=(a)\quad \text{pour}\quad i\neq j; \tag{35}$$

2° une transformation homéomorphe f de C_n telle que
$$f(z)\sim(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{k_n}, \tag{36}$$
où $p_j\in P_j$ et $f(a)=-1$, et telle qu'en posant
$$f(C_n)=D_n, \tag{37}$$
on a
$$D_n=L_1+\ldots+L_n, \tag{38}$$
où L_j est la circonférence
$$|z-j|=j+1$$
(toutes ces circonférences sont donc tangentes au point -1 et contiennent le point 0 à l'intérieur, cf. Fig. 1).

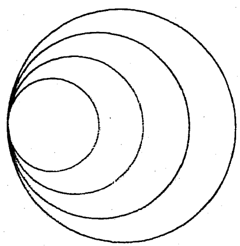

Fig. 1

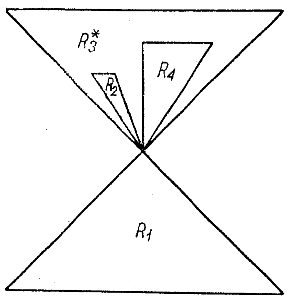

Fig. 2

Soit $n=1$. Dans ce cas, C_1 désigne une courbe simple fermée qui coupe le plan entre les continus P_0 et P_1 et ne contient pas le point à l'infini [19]). En admettant que $k_0=1$ et $k_1=-1$ (ce qui est évidemment légitime), soit f une transformation homéomorphe de C_1 en L_1 qui n'altère pas l'orientation de C_1 dans le cas où P_0 est contenu dans la région bornée de $\mathcal{S}_2-C_1$, et qui l'altère dans le cas contraire. En extrayant un point p_0 de P_0 et un point p_1 de P_1, on a donc, pour $z\in C_1$ (voir (13)),
$$f(z)\sim(z-p_0)^{k_0}(z-p_1)^{k_1}.$$
Enfin $a=f^{-1}(-1)$.

Le cas $n=1$ se trouve donc établi.

Passons au cas général où $n>1$, en admettant que notre prémisse soit vraie pour $n-1$. Il est aussi légitime d'admettre que les formules (31)-(33) soient satisfaites.

Unissons les continus P_{n-1} et P_n par un arc $A=pq$ tel que [20])
$$AP_{n-1}=(p),\quad AP_n=(q)\quad \text{et}\quad AP_j=0\quad \text{pour}\quad j<n-1. \tag{39}$$
Soit
$$P_{n-1}^*=P_{n-1}+A+P_n. \tag{40}$$
Les continus
$$P_0,\ldots,P_{n-2},P_{n-1}^*$$
soit donc disjoints et aucun d'eux ne coupe le plan [21]). En outre, en posant
$$k_{n-1}^*=k_{n-1}+k_n, \tag{41}$$
le système d'entiers
$$k_0,\ldots,k_{n-2},k_{n-1}^*$$
satisfait d'après (32) aux conditions (6)-(8) (en substituant $n-1$ à n).

Il existe donc par hypothèse un continu C_{n-1} de la forme (34) et une transformation homéomorphe f^* de C_{n-1} en D_{n-1} telle que
$$f^*(z)\sim(z-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_{n-2})^{k_{n-2}}(z-p_{n-1})^{k_{n-1}^*}\quad \text{et}\quad f^*(a)=-1. \tag{42}$$
L'ensemble $\mathcal{S}_2-C_{n-1}$ étant formé de n composantes, posons
$$\mathcal{S}_2-C_{n-1}=R_0+\ldots+R_{n-1},$$
où
$$P_0\subset R_0,\quad \ldots,\quad P_{n-2}\subset R_{n-2},\quad P_{n-1}^*\subset R_{n-1},$$
donc, selon (40),
$$p_{n-1}\in P_{n-1}\subset R_{n-1}\quad \text{et}\quad p_n\in P_n\subset R_{n-1}. \tag{43}$$

---

[19]) Voir [3], p. 362, 9.

[20]) Rappelons que la somme $P_0+\ldots+P_{n-2}$ ne coupe pas le plan, puisque ses sommandes sont disjoints et aucun ne coupe le plan. Cf. le renvoi [16]).

[21]) Car la somme de deux ensembles fermés dont aucun ne coupe le plan et dont le produit est connexe ne coupe le plan non plus. Voir [3], p. 355, 7 et p. 354, 2.

Nous allons démontrer à présent qu'il existe une courbe simple fermée K_n telle que $K_n C_{n-1}=(a)$ et qui coupe la région R_{n-1} en deux régions R_{n-1}^* et R_n telles que

$$P_{n-1}\subset R_{n-1}^* \quad \text{et} \quad P_n\subset R_n,$$

donc que

(44) $$p_{n-1}\in P_{n-1}\subset R_{n-1}^*\subset R_{n-1} \quad \text{et} \quad p_n\in P_n\subset R_n\subset R_{n-1}.$$

Tout point de $\mathrm{Fr}(R_{n-1})$, donc le point a en particulier, étant accessible de la région R_{n-1} [22]), soit ab un arc tel que

$$ab-(a)\subset R_{n-1}, \quad ab\cdot P_n=(b) \quad \text{et} \quad ab\cdot P_{n-1}=0.$$

Ni le continu P_n, ni l'arc ab n'étant une coupure du plan, leur somme n'en est une non plus. Il existe donc un continu Q tel que

$$P_{n-1}\subset Q, \quad Q\cdot(P_n+ab)=0 \quad \text{et} \quad Q-R_{n-1}\neq 0.$$

Les continus $U=P_n+ab$ et $V=Q+(\mathcal{S}_2-R_{n-1})$ satisfaisant aux conditions:

1⁰ $UV=(a)$,

2⁰ $U-V$ est connexe,

3⁰ U n'est pas une coupure du plan,

il existe [23]) une courbe simple fermée K_n qui sépare les ensembles

$$U-V=P_n+ab-(a) \quad \text{et} \quad V-U=Q+(\mathcal{S}_2-R_{n-1})-(a).$$

K_n est la courbe demandée.

En définissant C_n conformément à (34), il vient (cf. Fig. 2)

(45) $$\mathcal{S}_2-C_n=R_0+\ldots+R_{n-2}+R_{n-1}^*+R_n,$$

le membre droit représentant la décomposition de $\mathcal{S}_2-C_n$ en composantes.

Soit h une transformation homéomorphe de K_n en L_n telle que (cf. **1**,8)

(46) $$h(z)\sim(z-p_{n-1})^{-k_n}(z-p_n)^{k_n} \quad \text{et} \quad h(a)=-1.$$

La fonction f, définie par les conditions

(47) $$f(z)=\begin{cases} f^*(z) & \text{pour} \quad z\in C_{n-1}, \\ h\ (z) & \text{pour} \quad z\in K_n, \end{cases}$$

est donc (cf. (42) et (38)) une transformation homéomorphe de C_n en D_n.

En vertu de (45), il vient, pour $z\in C_n$,

(48) $$f(z)\sim(z-p_0)^{m_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{m_n} \quad \text{où} \quad m_0+\ldots+m_n=0.$$

[22]) Cf. [3], p. 365, 11.

[23]) Cf. [3], p. 369, 16 ou bien [7], p. 469.

Cette relation ayant évidemment lieu aussi sur C_{n-1}, ainsi que sur K_n, on en déduit, en vertu de (42), (44), (47) et le théorème 6 du N⁰1

$$m_0=k_0, \quad \ldots, \quad m_{n-2}=k_{n-2}, \quad m_{n-1}+m_n=k_{n-1}^*,$$

et, en vertu de (46), que $m_n=k_n$. Il en résulte d'après (41) que

$$m_{n-1}=k_{n-1}^*-m_n=k_{n-1}^*-k_n=k_{n-1}$$

et la formule (48) entraîne aussitôt (36).

Remarque. Il n'est pas toujours possible d'identifier, dans l'énoncé du théorème II, la fonction f à r (cf. [9]).

4. Démonstration du Théorème III. On constate facilement que le théorème II reste vrai en remplaçant les termes *continu A somme de n courbes simples fermées* par *ensemble A somme de n courbes simples fermées disjointes*. La démonstration en devient même plus simple. On peut admettre en outre que l'ensemble $f(A)$ est somme de n circonférences (distinctes) $V_1,\ldots,V_n$, à centre 0.

Soient $K_1,\ldots,K_n$ les courbes dont se compose l'ensemble A, soit f l'homéomorphie satisfaisant à la formule (36) sur A et soit h l'homéomorphie inverse à f. Toute homéomorphie entre deux courbes simples fermées, ayant une extension (homéomorphe) sur le plan tout entier, il existe n anneaux circulaires ouverts disjoints $W_1,\ldots,W_n$ tels que $V_j\subset W_j$ (pour $1\leqslant j\leqslant n$) et une homéomorphie h^* définie sur $W_1+\ldots+W_n$, telle que

(49) $$(p_0,\ldots,p_n)\subset\mathcal{S}_2-h^*(W_1+\ldots+W_n),$$

(50) $$h^*(w)=h(w) \quad \text{pour} \quad w\in V_1+\ldots+V_n.$$

L'ensemble $G=h^*(W_1+\ldots+W_n)$ est donc un ensemble ouvert qui coupe le plan en $n+1$ régions contenant respectivement les points $p_0,\ldots,p_n$. En désignant par f^* l'homéomorphie inverse à h^*, on a par conséquent une relation de la forme

(51) $$f^*(z)\sim(z-p_0)^{m_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{m_n} \quad \text{pour} \quad z\in G.$$

Comme, d'autre part, $A\subset G$ et $f^*(z)=f(z)$ pour $z\in A$ (d'après (50)), il vient

(52) $$f(z)\sim(z-p_0)^{m_0}\cdot\ldots\cdot(z-p_n)^{m_n} \quad \text{pour} \quad z\in A.$$

En rapprochant la formule (52) de (36), on en déduit (en vertu de **1**,3) que $m_0=k_0,\ldots,m_n=k_n$. Finalement, en substituant k_j à m_j dans la formule (51), on parvient à la conclusion demandée.

Remarques. Les théorèmes II et III peuvent être généralisés en remplaçant les systèmes $p_0,\ldots,p_n$ et $k_0,\ldots,k_n$ par $p_0,\ldots,p_n,\ldots,p_{n+m}$ et $k_0,\ldots,k_n,\ldots,k_{n+m}$ où $k_{n+m}=0$ pour $m>0$. Il suffit à ce but (dans le cas du théorème II) de transformer les courbes K_{n+m} (pour $m>0$) en les circonférences $|z+m+1|=m$ (qui ne coupent pas le plan entre 0 et ∞).

D'une manière analogue, dans le cas du théorème III, on prend pour V_{n+m} une circonférence (donc pour W_{n+m} — un anneau circulaire) qui ne coupe pas le plan entre 0 et ∞.

5. A étant un sous-ensemble du plan $\mathcal{S}_2$, désignons par $R(A)$ la famille de toutes les fonctions $f \in \mathfrak{P}^A$ qui sont homotopes à des fonctions rationnelles.

Soit $f \in R(A)$. Si f n'est pas homotope à une constante, on peut admettre, d'après le théorème 5 du N°1, que $f \sim r$, où la fonction r est définie par la formule (5), où les exposants $k_0, \ldots, k_n$ satisfont aux conditions (6) et (7) et où les points $p_0, \ldots, p_n$ appartiennent à des constituants de $\mathcal{S}_2 - A$, distincts deux à deux. Posons

$$\mu(f) = [k_0, \ldots, k_n]. \tag{53}$$

D'après le théorème 7 du N°1, le système $\mu(f)$ est défini — abstraction faite de l'ordre de ses termes — de façon univoque, indépendamment du choix de la fonction r.

Le théorème I peut donc être formulé de la façon suivante.

COROLLAIRE I. *A étant un ensemble localement connexe, f une homéomorphie homotope à une fonction rationnelle et $\mu(f)$ étant définie par la formule* (53), *l'inégalité* (8) *est réalisée*[24]).

Remarque. Dans le cas, où A est soit un ensemble fermé, soit un ensemble localement connexe dont le complémentaire se compose d'un nombre fini de constituants, on a

$$R(A) = \mathfrak{P}^A,$$

c'est-à-dire que toute fonction $f \in \mathfrak{P}^A$ est homotope à une fonction rationnelle. En conséquence le corollaire I est applicable, dans ce cas, à toute homéomorphie $f \in \mathfrak{P}^A$.

Nous allons compléter cette remarque en établissant (dans le N°6) le théorème suivant.

THÉORÈME IV. *Soit A un ensemble formé d'un nombre fini de composantes*

$$A = A_1 + \ldots + A_m.$$

Soit $f \in \mathfrak{P}^A$. En supposant que

$$(f|A_j) \in R(A_j) \quad \textit{pour} \quad j = 1, \ldots, m,$$

on a

$$f \in R(A).$$

[24]) Dans le cas où $f \sim 1$ nous convenons que $\mu(f)$ est l'ensemble vide. La thèse du corollaire est réalisée alors „dans le vide".

Autrement dit, *si la fonction f est homotope à une fonction rationnelle sur toute composante de A, elle est homotope à une fonction rationnelle sur l'ensemble A tout entier.*

Toute homéomorphie définie sur une région étant homotope à une fonction rationnelle (même à une homographie)[25]), nous déduirons directement du théorème IV le corollaire suivant.

COROLLAIRE II. *A étant un ensemble ouvert formé d'un nombre fini de composantes*[26]) *et f une transformation homéomorphe de A, homotope à une fonction rationnelle, l'inégalité* (8) *est réalisée, $\mu(f)$ étant définie par la formule* (53).

6. Nous allons baser la démonstration du théorème IV sur deux lemmes dont le premier concerne la *translation des zéros et des pôles* d'une fonction rationnelle.

LEMME 1. *Étant donnés un ensemble arbitraire (non vide) A, un entourage ouvert G de A et une fonction rationnelle*

$$r(z) = (z-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (z-p_n)^{k_n} \quad \textit{où} \quad p_j \in \mathcal{S}_2 - A,$$

il existe un système de points $q_0, \ldots, q_n$ appartenant à $\bar{G}$ et tel que

$$r(z) \sim (z-q_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (z-q_n)^{k_n} \quad \textit{sur} \quad A.$$

Démonstration. Considérons deux cas. Si $p_j \in \bar{G}$, posons $q_j = p_j$. Dans le cas contraire, soit C_j le constituant de l'ensemble $\mathcal{S}_2 - G$ qui contient le point p_j et soit q_j un point de l'ensemble $C_j \bar{G}$ (qui est non vide)[27]). Il vient

$$p_j, q_j \in C_j \subset \mathcal{S}_2 - G \subset \mathcal{S}_2 - A.$$

C_j étant un continu, l'ensemble A ne coupe donc pas le plan entre p_j et q_j, et le théorème 4 du N°1 est applicable.

LEMME 2. *Étant donnés deux ensembles séparés P et Q et trois fonctions f, g et h telles que*

$$f, g, h \in \mathfrak{P}^{P+Q},$$

$$f \sim g \quad \textit{sur} \quad P, \quad f \sim h \quad \textit{sur} \quad Q, \tag{54}$$

$$h \sim 1 \quad \textit{sur} \quad P, \quad g \sim 1 \quad \textit{sur} \quad Q, \tag{55}$$

on a

$$f \sim gh \quad \textit{sur} \quad P+Q. \tag{56}$$

En effet, on obtient par multiplication

$$f \sim gh \quad \text{sur} \quad P \quad \text{et sur} \quad Q. \tag{57}$$

[25]) Voir [6], p. 363, théorème 4.

[26]) Nous ne faisons aucune hypothèse sur le nombre de composantes de $\mathcal{S}_2 - A$.

[27]) Car, d'après un théorème général sur les espaces X connexes et compacts, si G est un ensemble ouvert et C est une composante de $X - G$, on a $C\bar{G} \neq 0$. Voir [3], p. 112, théorème I.

Les ensembles P et Q étant disjoints et ouverts dans $P+Q$, la proposition (57) implique (56)[28].

Démonstration du Théorème IV. Procédons par induction. Le théorème étant évident pour $m=1$, admettons qu'il soit vrai pour $m-1$ (où $m>1$).

Les ensembles connexes $A_1,\dots,A_m$ étant séparés deux à deux, il existe des régions $R_1,\dots,R_m$ telles que[29])

(58) $$A_j \subset R_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

et

(59) $$R_i R_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Les ensembles connexes $R_1,\dots,R_m$ étant disjoints, il existe un indice j, admettons que ce soit $j=1$, et un ensemble connexe S tel que[30])

(60) $$R_1 S = 0 \quad \text{et} \quad R_2+\dots+R_m \subset S.$$

Posons pour abréger

(61) $$P = A_1, \quad Q = A_2+\dots+A_m,$$

(62) $$P^* = R_1, \quad Q^* = R_2+\dots+R_m.$$

On constate aussitôt que

(63) $$P \subset P^*, \quad Q \subset Q^* \subset \mathrm{Int}(S).$$

En outre, les ensembles P et Q sont disjoints et ouverts relativement à $P+Q$ et les ensembles P^* et Q^* sont disjoints et ouverts (dans $\mathcal{S}_2$).

Il en résulte, d'après (63), que

(64) $$\overline{P^*} Q^* = 0, \quad \text{donc} \quad \overline{P^*} Q = 0,$$

et, d'après (60) et (62), que

(65) $$P^* \bar{S} = 0, \quad \text{donc} \quad P\bar{S} = 0.$$

On a par hypothèse $(f|P) \in R(P)$ et $(f|Q) \in R(Q)$; autrement dit:

(66) $$f(z) \sim (z-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (z-p_n)^{k_n} \quad \text{sur} \quad P$$

et

(67) $$f(z) \sim (z-q_0)^{m_0} \cdot \ldots \cdot (z-q_r)^{m_r} \quad \text{sur} \quad Q.$$

[28]) Cf. [6], p. 325, théorème 10.

[29]) Voir [3], p. 163, théorème 5.

[30]) Car, d'après un théorème concernant les espaces connexes arbitraires, étant donné un système fini d'ensembles connexes $R_1,\dots,R_m$, il existe un indice j et un ensemble connexe S tels que

$$SR_j = 0, \quad R_1+\dots+R_{j-1}+R_{j+1}+\dots+R_m \subset S.$$

Voir [3], p. 88, théorème 6.

Il est légitime d'admettre en outre, en vertu du lemme 1 et des formules (63), que $p_0,\dots,p_n \in \overline{P^*}$ et $q_0,\dots,q_r \in \overline{\mathrm{Int}(S)} \subset \bar{S}$.

Les ensembles $\overline{P^*}$ et $\bar{S}$ étant des continus, on en conclut, en tenant compte de (65) et (64), que ni l'ensemble P ne coupe le plan entre les points $q_0,\dots,q_r$, ni l'ensemble Q — entre $p_0,\dots,p_n$. Par conséquent

(68) $$(z-q_0)^{m_0} \cdot \ldots \cdot (z-q_r)^{m_r} \sim 1 \quad \text{sur} \quad P,$$

(69) $$(z-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (z-p_n)^{k_n} \sim 1 \quad \text{sur} \quad Q.$$

En appliquant le lemme 2, on déduit des formules (66)-(69) que

$$f(z) \sim (z-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (z-p_n)^{k_n} (z-q_0)^{m_0} \cdot \ldots \cdot (z-q_r)^{m_r} \quad \text{sur} \quad A,$$

ce qui prouve que la fonction f est homotope à une fonction rationnelle.

Corollaire III. *Étant donnés un système (fini) d'ensembles connexes $A_1,\dots,A_m$, séparés deux à deux, et un système de fonctions rationnelles $r_1,\dots,r_m$ tel que les zéros et pôles de r_j (pour $1 \leqslant j \leqslant m$) sont situés en dehors de A_j, il existe une fonction rationnelle r dont les zéros et pôles n'appartiennent à aucun des ensembles A_j et qui est homotope à r_j sur A_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$.*

Ce corollaire se déduit du théorème IV en définissant la fonction f par la condition: $f(z) = r_j(z)$ pour $z \in A_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Travaux cités

[1] Eilenberg, S., *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), p. 61-112.

[2] Kuratowski, K., *Topologie* I, Monogr. Mat. 20, Warszawa-Wrocław 1948.

[3] — *Topologie* II, Monogr. Mat. 21, Warszawa-Wrocław 1950.

[4] — *Sur une propriété analytique des homéomorphies définies sur des continus plans*, Bull. Acad. Polon. des Sc., Cl. III, 2 (1954), p. 9-12.

[5] — *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fund. Math. 12 (1928), p. 214-239.

[6] — *Théorèmes sur l'homotopie des fonctions continues de variable complexe et leurs rapports à la Théorie des fonctions analytiques*, Fund. Math. 33 (1945), p. 316-367.

[7] Lavrentieff, M., *Contribution à l'étude des ensembles homéomorphes*, Fund. Math. 6 (1924), p. 149-160.

[8] Moore, R. L., *Concerning the separation of point sets by curves*, Proc. Nat. Ac. Sc. 11 (1925).

[9] Pliś, A., *Rational functions univalent on sets separating the plane*, Bull. Acad. Polon. des Sc. Cl. III, 2 (1954).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 26. 10. 1953