Sur une relation entre deux substitutions linéaires [1])

par

W. Sierpiński (Warszawa)

Pour établir une propriété paradoxale du segment d'une droite, M. J. von Neumann a démontré l'existence de deux transformations linéaires fractionnaires

$$\varphi_1(x)=\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x)=\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$$

entre lesquelles il n'existe aucune relation de la forme

$$\varphi_1^{k_1}\varphi_2^{k_2}\varphi_1^{k_3}\varphi_2^{k_4}\dots\varphi_1^{k_{2n-1}}\varphi_2^{k_{2n}}=1,$$

où $k_1,k_2,\dots,k_n$ sont des entiers, tous non nuls, à l'exception peut-être de k_1 et k_{2n} [2]). Le but de cette Note est de démontrer que, dans cet énoncé, les transformations fractionnaires ne peuvent pas être remplacées par des transformations linéaires entières (de la forme $ax+b$).

Théorème 1. *$\varphi_1(x)=a_1x+b_1$ et $\varphi_2(x)=a_2x+b_2$ étant deux substitutions linéaires quelconques, où $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, on a l'identité*

$$\psi=\varphi_1\varphi_2^2\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2^2\varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}=1 \tag{1}$$

($\sigma(x)$ et $\tau(x)$ étant deux substitutions, $\sigma\tau$ désigne la substitution $\sigma(\tau(x))$; σ^{-1} désigne la substitution inverse pour σ et $\sigma^{k+1}=\sigma^k\sigma$, $\sigma^{k-1}=\sigma^k\sigma^{-1}$ pour k entier; 1 désigne la substitution identique $\sigma(x)=x$ pour tout x complexe. La formule (1) exprime qu'on a pour tout x complexe $\psi(x)=x$).

Théorème 2. *Il n'existe aucun système de $2q-1\leqslant 11$ nombres entiers $k_1,k_2,\dots,k_{2q-1}$, non nuls, sauf peut-être k_{2q-1}, tels qu'on ait pour deux substitutions linéaires quelconques $\varphi_1(x)=a_1x+b_1$ et $\varphi_2(x)=a_2x+b_2$, où $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, l'identité*

$$\varphi_1^{k_{2q-1}}\varphi_2^{k_{2q-2}}\dots\varphi_2^{k_2}\varphi_1^{k_1}=1. \tag{2}$$

---

[1]) Présenté à la séance du 3 avril 1945 de la Société Polonaise de Mathématique (voir les Annales de la Soc. Pol. Math. 18 (1945), p. 160).

[2]) Voir [1], p. 107.

Démonstration du théorème 1. Soient $\varphi_1(x)=a_1x+b_1$ et $\varphi_2(x)=a_2x+b_2$ deux substitutions linéaires données, où $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$. On démontre sans peine par induction que, si $a_1\neq 0$ et $a_1\neq 1$, on a pour k entier

$$\varphi_1^k(x)=a_1^kx+\frac{a_1^k-1}{a_1-1}\,b_1$$

et, si encore $a_2\neq 0$, $a_2\neq 1$, on a, pour $k_1,k_2,\dots,k_{2q}$ entiers, en posant

$$\begin{aligned}k_{2j-1}+k_{2j+1}+\dots+k_{2q-1}&=s_{2j-1}\\ k_{2j}+k_{2j+2}+\dots+k_{2q}&=t_{2j}\end{aligned}\qquad\text{pour}\quad j=1,2,\dots,q,\tag{3}$$

la formule

$$\begin{aligned}&\varphi_2^{k_{2q}}\varphi_1^{k_{2q-1}}\dots\varphi_2^{k_2}\varphi_1^{k_1}(x)\\ &=a_1^{s_1}a_2^{s_2}x+\frac{b_1}{a_1-1}[(a_1^{s_1}-a_1^{s_3})a_2^{s_2}+(a_1^{s_3}-a_1^{s_5})a_2^{s_4}+\dots\\ &\qquad\dots+(a_1^{s_{2q-3}}-a_1^{s_{2q-1}})a_1^{s_{2q-2}}+(a_1^{s_{2q-1}}-1)a_2^{s_{2q}}]\\ &\quad+\frac{b_2}{a_2-1}[a_1^{s_3}(a_2^{s_2}-a_2^{s_4})+a_1^{s_5}(a_2^{s_4}-a_2^{s_6})+\dots+a_1^{s_{2q-1}}(a_2^{s_{2q-2}}-a_2^{s_{2q}})+a_2^{s_{2q}}-1].\end{aligned}\tag{4}$$

Pour $k_1,k_2,\dots,k_{12}=1,2,-1,-1,1,-1,-1,2,1,-1,-1,-1$, on trouve, d'après (3) respectivement

$$s_1,s_2,\dots,s_{12}=0,0,-1,-2,0,-1,-1,0,0,2,-1,-1,$$

et la formule (4) donne

$$\begin{aligned}\psi(x)=x&+\frac{b_1}{a_1-1}[(1-a_1^{-1})+(a_1^{-1}-1)a_2^{-2}+(1-a_1^{-1})a_2^{-1}+(a_1^{-1}-1)\\ &\qquad+(1-a_1^{-1})a_2^{-2}+(a_1^{-1}-1)a_2^{-1}]\\ &+\frac{b_2}{a_2-1}[a_1^{-1}(1-a_2^{-2})+(a_2^{-2}-a_2^{-1})\\ &\qquad+a_1^{-1}(a_2^{-1}-1)+(1-a_2^{-2})+a_1^{-1}(a_2^{-2}-a_2^{-1})+a_2^{-1}-1]=x.\end{aligned}$$

La formule (1) est ainsi démontrée pour $a_1\neq 1$, $a_2\neq 1$. Or, comme on le voit sans peine, $\psi(x)$ est un polynôme en $a_1,a_1^{-1},a_2,a_2^{-1}$ (aux coefficients dépendants de b_1 et b_2): la formule (1) étant démontrée dans le cas, où $a_1\neq 1$, $a_2\neq 1$, on en déduit (p. e. en passant aux limites pour $a_1=1$, resp. $a_2=1$) qu'elle est vraie pour tous les a_1 et a_2 complexes.

Le théorème 1 est ainsi démontré.

Il faut remarquer qu'on a aussi les identités

$$\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2^2\varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_1\varphi_2^2=1$$

et

$$\varphi_1\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-2}\varphi_2^2\varphi_1^2\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-2}\varphi_2^{-1}\varphi_1^2\varphi_2^2\varphi_1^{-2}\varphi_2^{-1}\varphi_1=1.$$

Démonstration du théorème 2. Supposons qu'il existe des entiers k_j $(j=1,2,\dots,11)$ non nuls, sauf peut-être k_{11}, tels qu'on ait l'identité (2) pour $q=6$ quelles que soient les substitutions linéaires $\varphi_1(x)=a_1x+b_1$ et $\varphi_2(x)=a_2x+b_2$, où $a_1\neq 0$ et $a_2\neq 0$. Vu les formules (3) et (4) pour $q=6$, $k_{2q}=0$, on a $s_1=s_2=s_{12}=0$ et, pour tous les a_1 et a_2 non nuls, la relation suivante est vérifiée identiquement

$$\begin{aligned}(a_1^{s_1}-a_1^{s_3})a_2^{s_2}+(a_1^{s_3}-a_1^{s_5})a_2^{s_4}+(a_1^{s_5}-a_1^{s_7})a_2^{s_6}&\\ +(a_1^{s_7}-a_1^{s_9})a_2^{s_8}+(a_1^{s_9}-a_1^{s_{11}})a_2^{s_{10}}+a_1^{s_{11}}-1&=0,\end{aligned}$$

donc, vu que $s_1=s_2=0$

$$\begin{aligned}&a_1^{s_3}a_2^{s_4}+a_1^{s_5}a_2^{s_6}+a_1^{s_7}a_2^{s_8}+a_1^{s_7}a_2^{s_{10}}+a_1^{s_{11}}\\ &=a_1^{s_3}+a_1^{s_5}a_2^{s_4}+a_1^{s_7}a_2^{s_6}+a_1^{s_9}a_2^{s_8}+a_1^{s_{11}}a_2^{s_{10}}.\end{aligned}\tag{5}$$

Cette égalité étant une identité en a_1 et a_2 et le premier terme à gauche étant $a_1^{s_3}a_2^{s_4}$, il existe un terme à droite qui lui est égal. Suivant que c'est le premier, le second etc. terme à droite, distinguons 5 cas:

1° $a_1^{s_3}a_2^{s_4}=a_1^{s_3}$. Il en résulte que $s_4=0$ et, vu que $s_2=0$, on trouve, d'après (3) $k_2=s_2-s_4=0$, ce qui est impossible, les nombres $k_1,k_2,\dots,k_{10}$ étant non nuls.

2° $a_1^{s_3}a_2^{s_4}=a_1^{s_5}a_2^{s_4}$. Cela donne $s_3=s_5$ et $k_3=s_3-s_5=0$, ce qui est impossible.

3° $a_1^{s_3}a_2^{s_4}=a_1^{s_7}a_2^{s_6}$, d'où $s_4=s_6$ et $k_4=s_4-s_6=0$, ce qui est impossible.

4° $a_1^{s_3}a_2^{s_4}=a_1^{s_9}a_2^{s_8}$. Cela donne $s_3=s_9$ et $s_4=s_8$. Après la réduction de ces termes égaux la formule (5) donne

$$a_1^{s_5}a_2^{s_6}+a_1^{s_7}a_2^{s_8}+a_1^{s_9}a_2^{s_{10}}+a_1^{s_{11}}=a_1^{s_3}+a_1^{s_5}a_2^{s_4}+a_1^{s_7}a_2^{s_6}+a_1^{s_{11}}a_2^{s_{10}}.\tag{6}$$

Le premier terme à gauche étant $a_1^{s_5}a_2^{s_6}$, il existe un terme à droite qui lui est égal. On n'a pas $a_1^{s_5}a_2^{s_6}=a_1^{s_3}$, puisqu'il en résulterait $s_5=s_3$ et $k_3=s_3-s_5=0$. On n'a pas $a_1^{s_5}a_2^{s_6}=a_1^{s_5}a_2^{s_4}$, puisque cela donnerait $s_6=s_4$ et $k_4=0$. On n'a pas $a_1^{s_5}a_2^{s_6}=a_1^{s_7}a_2^{s_6}$, puisque cela donnerait $s_5=s_7$ et $k_5=0$. On a donc $a_1^{s_5}a_2^{s_6}=a_1^{s_{11}}a_2^{s_{10}}$. Après la réduction de ces termes égaux, l'identité (6) donne

$$a_1^{s_7}a_2^{s_8}+a_1^{s_9}a_2^{s_{10}}+a_1^{s_{11}}=a_1^{s_3}+a_1^{s_5}a_2^{s_4}+a_1^{s_7}a_2^{s_6}.\tag{7}$$

Le premier terme à gauche de (7) étant $a_1^{s_7} a_2^{s_8}$, il existe un terme à droite qui lui est égal. On n'a pas $a_1^{s_7} a_2^{s_8} = a_1^{s_3}$, puisque cela donne $s_7 = s_3$ et, comme $s_3 = s_9$, on trouve $s_7 = s_9$ et $k_7 = 0$. On n'a pas $a_1^{s_7} a_2^{s_8} = a_1^{s_5} a_2^{s_4}$, puisque cela donne $s_7 = s_5$ et $k_5 = 0$. On n'a pas $a_1^{s_7} a_2^{s_8} = a_1^{s_7} a_2^{s_6}$, puisque cela donne $s_8 = s_6$ et $k_6 = 0$. Le cas 4^0 est donc impossible.

5^0 $a_1^{s_3} a_2^{s_4} = a_1^{s_{11}} a_2^{s_{10}}$. Après la réduction de ces termes égaux, l'identité (5) donne

$$a_1^{s_5} a_2^{s_6} + a_1^{s_7} a_2^{s_8} + a_1^{s_9} a_2^{s_{10}} + a_1^{s_{11}} = a_1^{s_3} + a_1^{s_5} a_2^{s_4} + a_1^{s_7} a_2^{s_6} + a_1^{s_9} a_2^{s_8}. \tag{8}$$

Le premier terme à gauche étant $a_1^{s_5} a_2^{s_6}$, il existe un terme à droite qui lui est égal. On n'a pas $a_1^{s_5} a_2^{s_6} = a_1^{s_3}$, puisque cela donne $s_5 = s_3$ et $k_3 = 0$. On n'a pas $a_1^{s_5} a_2^{s_6} = a_1^{s_5} a_2^{s_4}$, puisque cela donne $s_6 = s_4$ et $k_4 = 0$. On n'a pas $a_1^{s_5} a_2^{s_6} = a_1^{s_7} a_2^{s_6}$, puisque cela donne $s_5 = s_7$ et $k_5 = 0$. On n'a pas enfin $a_1^{s_5} a_2^{s_6} = a_1^{s_9} a_2^{s_8}$, puisque cela donne $s_6 = s_8$ et $k_6 = 0$.

Le cas 5^0 est donc impossible.

Le théorème 2 est ainsi démontré pour $q = 6$. Or, si l'on a pour $2p-1$ entiers non nuls $k_1, k_2, \ldots, k_{2p-1}$ l'identité

$$\varphi_1^{k_{2p-1}} \varphi_2^{k_{2p-2}} \ldots \varphi_2^{k_2} \varphi_1^{k_1} = 1$$

on a aussi l'identité

$$\varphi_2 \varphi_1^{k_{2p-1}} \varphi_2^{k_{2p-2}} \ldots \varphi_2^{k_2} \varphi_1^{k_1} \varphi_2^{-1} = 1$$

(puisque $\varphi_2 \cdot 1 \cdot \varphi_2^{-1} = 1$) et, si l'on a pour $2p$ entiers non nuls l'identité

$$\varphi_2^{k_{2p}} \varphi_1^{k_{2p-1}} \ldots \varphi_2^{k_2} \varphi_1^{k_1} = 1$$

on a aussi l'identité

$$\varphi_1^{-k_1} \varphi_2^{k_{2p}} \varphi_1^{k_{2p-1}} \ldots \varphi_2^{k_2} \varphi_1^{2k_1} = 1.$$

Il en résulte tout de suite que si le théorème 2 est vrai pour $q = p+1$, il est encore vrai pour $q = p$. Donc, le théorème 2 étant démontré pour $q = 6$, on conclut successivement qu'il est vrai pour $q = 5, 4, 3, 2, 1$. Le théorème 2 est ainsi démontré complètement.

Vu le théorème 2 on peut dire que la formule (1) présente la plus simple relation qui a lieu entre deux substitutions linéaires quelconques (le nombre 12 de facteurs du produit (1) ne pouvant pas être diminué).

Quant au théorème 1, il est à remarquer qu'il en résulte tout de suite la conséquence suivante. Il n'est pas vrai que, pour les fonctions linéaires de la variable complexe $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ que j'ai considérées dans Fund. Math. 37 [3]), les nombres 4) y envisagés sont tous $\neq 1$. La faute dans la démonstration du théorème 2 (l. c.) consistait en ce que j'avais regardé

[3]) Voir [2], p. 2.

comme chose évidente que (le nombre c n'étant pas une fonction rationnelle aux coefficients rationnels de α et β) la formule, qui se trouve à la ligne 16 en descendant de la p. 3 (l. c.), entraîne que $c = 0$. Or, cela n'est pas vrai, comme l'a démontré M. Mycielski.

Travaux cités

[1] J. v. Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Maßes*, Fund. Math. 13 (1929), p. 73-116.

[2] W. Sierpiński, *Sur un ensemble plan singulier*, Fund. Math. 37 (1950), p. 1-4.

Reçu par la Rédaction le 25. 4. 1953