



A point-to-set mapping $x \rightarrow \Phi(x) \in \mathfrak{R}(R)$ of S into $\mathfrak{R}(R)$ is called *upper semi-continuous*, if $\lim x_n = x_0$, $y_n \in \Phi(x_n)$, and $\lim y_n = y_0$ imply that $y_0 \in \Phi(x_0)$. Our extension of Kakutani's theorem may be stated as follows:

Theorem 3. *Let $x \rightarrow \Phi(x)$ be an upper semi-continuous point-to-set mapping of an r -dimensional m -plex $S = S_1[S_2S_3 \dots S_m]$, with m odd, into $\mathfrak{R}(R)$, such that if x is on the frontier of S_j ($1 \leq j \leq m$), then $\Phi(x)$ is a subset of the simplex S_j . Then there exists an $x_0 \in S$ such that $x_0 \in \Phi(x_0)$.*

By the n -th barycentric simplicial subdivision of the m -plex S , we mean the simplicial division of S determined by the n -th barycentric subdivision of every subsimplex of some fixed simplicial division of S . If, now, in Kakutani's proof, we replace the appeal to Brouwer's Theorem by an appeal to our Theorem 2 proved above, and make several obvious minor modifications, we obtain a proof of our Theorem 3.

Bibliography

- [1] Kakutani, S., *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), p. 457-459.
 [2] Knaster, B., Kuratowski, C. and Mazurkiewicz, S., *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe*, Fund. Math. **14** (1929), p. 132-137.
 [3] Kuratowski, C., *Topologie I*, 2^d ed., Warszawa-Wrocław 1948.
 [4] Sperner, E., *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **6** (1928), p. 265-272.

Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe

Par

B. Knaster et M. Reichbach (Wrocław)

Généralités. Nous entendons ici par *courbe* tout continu (ensemble compact et connexe dans un espace séparable) de dimension 1 au sens de Menger¹⁾, par l'ordre du point p d'un ensemble E , en symbole: $\text{ord}(p, E)$, le plus petit nombre cardinal pour lequel il existe dans tout entourage de p (ensemble ouvert contenant p) un entourage du même point dont la frontière a exactement ce nombre des points communs avec E , enfin par *bout* (extrémité) de E — tout point pour lequel $\text{ord}(p, E) = 1$ ²⁾. Cette égalité implique que $p \in E$ lorsque E est fermé.

Le livre — déjà classique — de Menger³⁾, auquel ces notions sont empruntées, contient des théorèmes dont il résulte en particulier que l'ensemble C^1 des bouts d'une courbe C quelconque est un G_δ de dimension 0⁴⁾. La question s'impose, si les deux dernières propriétés nécessaires sont déjà caractéristiques, c'est-à-dire à la fois suffisantes pour qu'un ensemble soit celui des bouts d'une courbe. Les considérations qui suivent donnent réponse à cette question.

Il y a d'abord lieu de fixer ce qu'il y est à caractériser *topologiquement*. Etant donné un ensemble B , l'existence d'une courbe C telle que $B = C^1$ n'est un invariant de l'homéomorphie de B ni dans des espaces topologiques fort pauvres (tels, en particulier, que la dendrite Δ ⁵⁾ dont nous ferons, à la fin, un usage essentiel pour la solution du problème), ni dans des espaces très vastes (celui de Hilbert par exemple). Envisageons en effet les deux exemples.

¹⁾ Voir C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne. Warszawa-Wrocław 1948, deuxième édition, p. 162.

²⁾ K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig-Berlin 1932, p. 97.

³⁾ Op. cit., p. 99.

⁴⁾ Ibidem, p. 105 et 112.

⁵⁾ Cf. H. M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Annals of Mathematics **27** (1925-1926), p. 42 et 43, où une construction analogue est employée à un but différent. La partie de Δ située au-dessous de l'axe des x est homéomorphe à celle de la courbe de Gehman située au-dessus de cet axe.

La dendrite Δ . \mathcal{C} désignant l'ensemble de Cantor sur le segment $0 \leq x \leq 1$ de l'axe d'abscisses, soit T l'ensemble des bouts gauches des intervalles (y compris les non-bornés) contigus à \mathcal{C} , donc l'ensemble de certaines fractions irréductibles de la forme $\tau = k/3^i$ avec k impair. Soit I_τ le segment de longueur $\sqrt{\tau}/2k = \sqrt{1/2 \cdot 3^i}$ où $\tau \in T$, situé sur la droite $y = x - \tau$ et ayant le point $(\tau, 0)$ pour son bout supérieur. Enfin, soit I_τ^* le segment symétrique à I_τ par rapport à la droite $x = 1/2$. Posons

$$\Sigma = \sum_{\tau \in T} (I_\tau + I_\tau^*) \quad \text{et} \quad \Delta = \bar{\Sigma}.$$

L'ensemble Δ (partie inférieure de la fig. 1, p. 27) est une dendrite.

En effet, on a $\Delta = \Sigma + \mathcal{C}$, car, en vertu de la définition, toute suite infinie de segments sommandes de Σ se compose de termes de longueur tendant vers 0; l'ensemble de leurs points-limites coïncide donc avec celui des points-limites de leurs bouts — disons — supérieurs, c'est-à-dire avec $\bar{T} = \mathcal{C}$. Puis, tout segment sommande de Σ aboutit, en vertu de la définition, sur un autre, 3 fois plus long (sommande du faisceau symétrique); on arrive donc par récurrence aux deux segments les plus longs, à savoir à $I_{1/2}$ et $I_{1/2}^*$. Ceux-là ayant un bout commun, à savoir leur bout inférieur $(1/2, -1/2)$, on conclut que la somme Σ est un semicontinu, même connexe par arcs, donc que sa fermeture Δ est un continu. L'ensemble des points-limites des segments sommandes de Σ étant — comme il a été dit — le discontinu \mathcal{C} , le continu Δ est dépourvu de continus de convergence⁶⁾; il est donc localement connexe.

Reste à montrer que Δ ne contient aucune courbe simple fermée. Or, il s'ensuit de la définition que Δ se compose de deux parties symétriques, désignons-les par Δ_0 et Δ_1 , géométriquement semblables à Δ (en échelle 1:3), à savoir composées de points d'ordonnées $-1/2 \cdot 3 \leq y \leq 0$ (et d'abscisses $0 \leq x \leq 1/3$ et $2/3 \leq x \leq 1$ respectivement), et unies par une ligne brisée composée de deux segments, désignons-la par A , à savoir de segments

$$y = -x, \quad 1/2 \cdot 3 \leq x \leq 1/2 \quad \text{et} \quad y = x - 1, \quad 1/2 \leq x \leq 1 - 1/2 \cdot 3.$$

Il en est donc de même de Δ_0 et Δ_1 en remplaçant l'échelle 1:3 par 1:3², ce qui donne lieu aux désignations $\Delta_{00}, \Delta_{01}, \Delta_{10}, \Delta_{101}, \Delta_{11}, \Delta_1$ et ainsi de suite. A défaut d'autres arcs entre Δ_0 et Δ_1 sauf celui désigné par A , la courbe simple fermée, supposée contenue dans Δ , se trouverait donc située soit dans Δ_0 , soit dans Δ_1 , donc, pour la même raison, soit dans Δ_{00} , soit dans Δ_{01} , soit dans Δ_{10} , soit dans Δ_{11} et ainsi de suite. Le diamètre de ces ensembles tendant vers 0 avec le nombre de leurs indices croissant à l'infini, la courbe en question n'existe pas.

⁶⁾ K. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, *Fundamenta Mathematicae* 9 (1927), p. 127 (définition) et 132 (lemme 3); voir aussi C. Kuratowski, *Topologie II*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wroclaw 1950, p. 176.

Convenons, pour abrégé, d'appeler *demi-carreau* toute ligne brisée composée de deux segments qui unissent respectivement deux points quelconques c_1 et c_2 de l'axe d'abscisses à celui $(|c_1 + c_2|/2, -|c_1 - c_2|/2)$. On remarquera ceci:

- (1) *Tout demi-carreau F^- aux bouts c_1 et c_2 qui sont respectivement les milieux de deux intervalles I_1 et I_2 contigus à \mathcal{C} et entre lesquels il n'y a pas d'intervalle dépassant en longueur l'un quelconque d'eux coupe la dendrite Δ en un seul point.*

Soient, en effet, a_1, b_1 et a_2, b_2 les bouts des intervalles I_1 et I_2 respectivement (b_1 , mais non b_2 , étant entre a_1 et a_2). Ces intervalles ne sont pas égaux, car entre deux intervalles égaux contigus à \mathcal{C} il y a toujours au moins un qui les dépasse en longueur. Admettons donc que I_1 est plus long que I_2 . Soit i le plus petit entier pour lequel l'ensemble $\mathcal{C} \cdot \Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$ (ces indices étant des 0 et des 1) contenant b_1 se trouve compris entre a_1 et b_2 . Enfin, soit d l'autre borne de cet ensemble.

L'intervalle I_2 ne peut être situé au-delà de $\mathcal{C} \cdot \Delta_{m_1 m_2 \dots m_{i-1} |m_i - 1|}$, car alors c'est l'ensemble

$$\mathcal{C} \cdot \Delta_{m_1 m_2 \dots m_{i-1}} = \mathcal{C} \cdot (\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i} + \Delta_{m_1 m_2 \dots m_{i-1} |m_i - 1|})$$

qui serait encore compris entre a_1 et b_2 , contrairement à la définition de i . De même, I_2 ne peut être situé entre les bornes de l'ensemble $\mathcal{C} \cdot \Delta_{m_1 m_2 \dots |m_i - 1|}$, car il serait alors dépassé en longueur par l'intervalle intermédiaire J séparant $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$ de $\Delta_{m_1 m_2 \dots |m_i - 1|}$ (donc ayant d pour l'un de ses bouts). Par conséquent $I_2 = J$, c'est-à-dire $a_2 = d$.

Il est ainsi établi que l'ensemble des points de \mathcal{C} situés entre a_1 et b_2 est exactement égal à $\mathcal{C} \cdot \Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$.

Considérons deux triangles rectangles isocèles contenant l'ensemble $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$: l'un, \mathcal{V}' , d'hypoténuse $b_1 a_2$ et l'autre, \mathcal{V}'' , d'hypoténuse $a_1 b_2$. Le triangle \mathcal{V}' est contenu dans le triangle \mathcal{V} délimité par le demi-carreau F^- , puisque son hypoténuse $c_1 c_2$ contient le segment $b_1 a_2$. Il est facile de voir que le triangle \mathcal{V} est à son tour contenu dans le triangle \mathcal{V}'' qui — d'après ce que nous venons d'établir — ne contient de la dendrite Δ que l'ensemble $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$ et une partie du segment rectiligne unissant le sommet inférieur de ce dernier à celui de l'ensemble $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_{i-1}}$, donc au point situé en dehors de \mathcal{V} (puisque le point b_2 l'est en dehors de l'hypoténuse $c_1 c_2$). Il en résulte que le demi-carreau F^- coupe ce segment et, comme il est perpendiculaire à lui, il le coupe en un seul point. C'est en même temps le seul point de $\Delta \cdot F^-$, car le segment en question constitue l'unique liaison entre les ensembles $\Delta \cdot \mathcal{V}'$ et $\Delta \cdot \mathcal{V}''$, entre lesquels F^- coupe Δ (voir fig. 2).

On conclut de (1) que tout point $p \in \mathcal{C}$ est un bout de Δ , car on peut évidemment l'enfermer dans un demi-carreau F^- aussi petit que l'on veut et assujéti à l'hypothèse de (1). Comme d'autre part tous les

autres points de Δ sont d'ordre 2 ou 3 d'après la définition de cette dendrite, l'ensemble \mathcal{C} est exactement celui de ses bouts:

$$(2) \quad \mathcal{C} = \Delta^1.$$

Le problème. Les propriétés de la dendrite Δ , nécessaires pour des applications ultérieures, étant ainsi établies, reprenons la discussion du problème. Il s'agissait de démontrer que l'existence d'une courbe ayant un ensemble donné B pour celui de ses bouts n'est pas une propriété invariante de B par homéomorphie dans la dendrite Δ considérée comme l'espace. En effet, posons $B = \Delta^1$, c'est-à-dire $B = \mathcal{C}$, et projetons B orthogonalement sur le segment I_1 par exemple. Soit $h(B)$ cette projection. Elle est biunivoque, donc bien une homéomorphie, B étant compact. Cependant il n'existe évidemment dans Δ aucune courbe C telle que l'on ait $h(B) = C^1$.

Considérons à son tour comme l'espace le cube fondamental de Hilbert (ou un espace euclidien de dimension $n > 1$ quelconque). Soit B un G_δ dense dans un intervalle borné ouvert I de l'axe des x . Toute courbe C contenant B contient donc le segment \bar{I} et comme $\text{ord}(p, \bar{I}) = 2$ pour tout $p \in B$, on a à plus forte raison $\text{ord}(p, C) > 1$, d'où $B \neq C^1$.

Cependant, B étant par définition un G_δ de dimension 0, il existe sur le plan une courbe dont l'ensemble des bouts est une image homéomorphe de B (voir le théorème, p. 17).

Ces deux exemples montrent donc que l'existence d'une courbe C telle que l'on ait $B = C^1$ n'est guère une propriété topologique de B . Il en résulte l'impossibilité d'une caractérisation topologique générale de la famille des ensembles C^1 par leur structure intrinsèque seule (sauf dans des espaces tout à fait triviaux, comme la droite, ou extrêmement spéciaux, comme certains continus indécomposables, par exemple).

Il reste donc la question de caractériser intrinsèquement la famille de ces ensembles à l'homéomorphie près, c'est-à-dire de déterminer ce qu'on appelle leur *type topologique* ?). En effet, l'existence, dans un espace donné, d'une courbe dont l'ensemble des bouts est homéomorphe à un ensemble B donné est une propriété topologique de B par définition.

Le problème est donc à poser comme il suit: est-ce que classe G_δ et dimension 0 sont des propriétés d'un ensemble non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour qu'il existe une courbe C telle que C^1 soit homéomorphe à cet ensemble?

Alors la réponse est affirmative.

Quant à l'espace, il est naturel *a priori* de se borner à celui euclidien de dimension 3, car il contient — comme on sait ⁸⁾ — des images

⁷⁾ C. Kuratowski, op. cit., p. 77.

⁸⁾ K. Menger, *Über umfassendste n -dimensionale Mengen*, Proceedings K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 29 (1926), p. 1125 et G. Nöbeling, *Über eine n -dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}* , Mathematische Annalen 104 (1930), p. 71.

homéomorphes de toutes les courbes. Mais en fait on pourra se borner au plan, comme on le verra tout à l'heure.

La solution. B étant un G_δ de dimension 0, il existe sur le plan une courbe C dont l'ensemble des bouts est homéomorphe à B .

En effet, l'ensemble B étant donné dans un espace topologique normal à base dénombrable, ou — ce qui revient au même ⁹⁾ — dans un espace métrique séparable, l'hypothèse $\dim(B) = 0$ entraîne ¹⁰⁾ l'existence dans l'ensemble \mathcal{C} de Cantor d'un ensemble Γ homéomorphe à B . Comme B est un G_δ par hypothèse, Γ est aussi un G_δ . On peut évidemment choisir $\Gamma \subset \mathcal{C}$ d'une infinité de manières et établir pour l'un d'eux l'existence d'une courbe plane C telle que $\Gamma = C^1$ — ce qui suffit pour que la démonstration se trouve achevée.

Nous allons toutefois établir davantage, à savoir le théorème suivant, qui exprime en même temps une propriété du discontinu linéaire:

Théorème. Étant donné un G_δ quelconque $\Gamma \subset \mathcal{C}$, il existe une courbe plane C telle que $\Gamma = C^1$.

Lemmes. Un théorème établi récemment par l'un de nous ¹¹⁾ entraîne comme cas particulier que Γ étant un G_δ situé dans \mathcal{C} , il existe sur le plan un ensemble compact K contenant \mathcal{C} et qui n'est de dimension 0 qu'en tout point de Γ :

$$(3) \quad \dim(p, K) = 0 \text{ équivaut à } p \in \Gamma.$$

Il suffit à ce but de représenter l'ensemble

$$(4) \quad \Phi = \mathcal{C} - \Gamma$$

comme somme d'ensembles compacts F_i où $i = 1, 2, \dots$ et de remplacer tout point $(x, 0)$ de F_i par le segment vertical l'unissant au point $(x, 1/i)$ par exemple.

Ici, il nous faut cependant plus que (3), à savoir

$$(5) \quad \text{ord}(p, K) > 1 \text{ pour tout } p \in K - \mathcal{C}.$$

C'est pourquoi la construction doit être modifiée et convenablement complétée. D'abord, Φ doit être représenté comme somme d'ensembles compacts *disjoints*:

$$(6) \quad \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{où} \quad F_i \cdot F_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j,$$

⁹⁾ P. Urysohn, *Zum Metrisationsproblem*, Mathematische Annalen 94 (1925), p. 310.

¹⁰⁾ P. Urysohn, *Sur les multiplicités Cantorienes*, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 77; voir aussi C. Kuratowski, op. cit., p. 173.

¹¹⁾ B. Knaster, *Un théorème sur la compactification*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 252-267; voir p. 261.



ce qui est toujours possible pour un F_σ de dimension 0 en vertu d'un lemme plus général, établi par nous deux¹²⁾. Puis, nous allons nous servir de quatre lemmes. En voici deux premiers:

- (7) *Etant donné un couple d'ensembles fermés et disjoints M, N situés sur un segment rectiligne S , il n'y a parmi les intervalles composantes de $S - (M + N)$ qu'un nombre fini qui ont un bout dans M et l'autre dans N .*

En effet, s'il y en avait une infinité, il en existerait nécessairement de longueur inférieure à tout nombre positif donné d'avance, en particulier à la distance entre les ensembles M et N , qui ne pourraient donc pas contenir les bouts respectifs de tels intervalles, contrairement à l'hypothèse.

De plus, dans les mêmes conditions,

- (8) *Entre tout point q' de M et tout point q'' de N il y a au moins un intervalle composante de $S - (M + N)$.*

Tel est évidemment l'intervalle aux bouts x' et x'' , en désignant par x' le point de M le plus proche de q'' sur le segment aux bouts q' et q'' , et par x'' le point de N le plus proche de x' sur le segment aux bouts x' et q'' .

Soit à présent Φ un F_σ contenu dans un ensemble parfait non-dense \mathcal{C} (pas nécessairement celui de Cantor), situé sur un segment S de l'axe des x (pas nécessairement sur le segment $0 \leq x \leq 1$) et contenant les bouts de ce segment. Il nous suffira de nous borner au cas où Φ n'est pas un ensemble fermé (cf. plus loin, p. 21). Représentons Φ dans la forme (6) et appliquons, pour tout $k=1, 2, \dots$, le lemme (7) au couple d'ensembles M_k, N_k où

$$(9) \quad M_k = \sum_{i=1}^k F_i \quad \text{et} \quad N_k = F_{k+1}.$$

Soient $I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \dots, I_{r(k)}^{(k)}$ tous les intervalles composantes de $S - (M_k + N_k)$ ayant leurs bouts dans les deux ensembles (9). Comme $M_k + N_k \subset \Phi \subset \mathcal{C}$, chacun de ces intervalles contient au moins un intervalle contigu à \mathcal{C} (c'est-à-dire intervalle composante de $S - \mathcal{C}$). Choisissons-en un de longueur maximum. Soient $J_1^{(k)}, J_2^{(k)}, \dots, J_{r(k)}^{(k)}$ les intervalles contigus à \mathcal{C} ainsi choisis et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r(k)}$ leurs longueurs. Posons

$$(10) \quad \lambda_k = \min(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r(k)}).$$

Il est facile de voir que, l'ensemble Φ étant non-compact par hypothèse, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, mais la suite $\{\lambda_k\}$ peut ne pas être monotone.

C'est pourquoi nous allons la remplacer par la suite $\{l_k\}$ définie par induction comme suit:

$$l_1 = \lambda_1, \quad l_{k+1} = \min(\lambda_{k+1}, l_k) \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Par conséquent

$$(11) \quad l_k \leq \lambda_k \quad \text{pour tout} \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(12) \quad \text{la suite } \{l_k\} \text{ est monotone et } \lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0.$$

Vu (10) et (11), il est ainsi assuré qu'à tout intervalle $I_i^{(k)}$, où $i = 1, 2, \dots, r(k)$, qui est composante de $S - (M_k + N_k)$ vient correspondre un sous-intervalle $J = J_i^{(k)}$ de longueur au moins égale à l_k et contigu à \mathcal{C} ; par conséquent en vertu de (8),

- (13) *Entre tout point q' de M_k et tout point q'' de N_k il y a au moins un intervalle J contigu à \mathcal{C} de longueur non moindre que l_k .*

Pour formuler le troisième lemme, il nous faut définir au préalable les éléments de construction qu'il concerne.

Considérons un point arbitraire

$$(14) \quad p \in \mathcal{C} - \Phi$$

et deux points les plus proches de p

$$(15_g) \quad g \in M_k, \quad (15_d) \quad d \in M_k$$

situés respectivement à gauche et à droite de p :

$$(16_g) \quad g < p, \quad (16_d) \quad p < d.$$

G désignant l'intervalle $g < x < p$ et D l'intervalle $p < x < d$, admettons que pour deux indices m et n tels que

$$(17_g) \quad k < m, \quad (17_d) \quad k < n$$

F_m empiète sur G et F_n sur D :

$$(18_g) \quad F_m \cdot G \neq \emptyset, \quad (18_d) \quad F_n \cdot D \neq \emptyset.$$

Soient, pour tout point $q = (x, 0)$ de F_i , $W(q)$ le segment vertical unissant q au point $(x, 1/i)$ et $\Omega(q)$ la circonférence de rayon

$$(19) \quad r_i = \min\left(\frac{1}{3^{i+1}}, \frac{l_i}{8}\right)$$

et de centre $(x, 1/i + r_i)$, avec laquelle par conséquent le segment $W(q)$ n'a que son bout supérieur en commun. Ainsi, h_i désignant la hauteur de $W(q) + \Omega(q)$, on a d'après (19)

$$(20) \quad h_i = \frac{1}{i} + 2r_i.$$

¹²⁾ B. Knaster et M. Reichbach, *Un lemme sur les F_σ* , ce volume, p. 172.



Vu (11), on conclut de (19) que

- (21) J étant un intervalle quelconque de l'axe d'abscisses, disjoint de \mathcal{C} et de longueur non inférieure à l_k , la projection d'aucun $\Omega(q)$ où $q \in \sum_{i=k}^{\infty} F_i$ n'empiète sur le milieu de J .

En vertu de (19) et (20),

- (22) Toute suite d'ensembles $\{W(q_i) + \Omega(q_i)\}$, où $q_i \in F_i$ et i prend une infinité de valeurs, a pour ses points limites ceux de \mathcal{C} .

Posons

$$(23) \quad L_i = \sum_{q \in F_i} [W(q) + \Omega(q)]$$

et considérons deux segments contigus à \mathcal{C} :

$$(24_g) \quad \begin{array}{l} J_g \subset G \text{ de longueur} \\ \text{au moins } l_{m-1}, \end{array} \quad (24_d) \quad \begin{array}{l} J_d \subset D \text{ de longueur} \\ \text{au moins } l_{n-1}. \end{array}$$

Un tel J_g existe en vertu de (13) appliqué à $m-1$ au lieu de k . En effet, on a d'une part $g \in M_{m-1}$ en vertu de (15_g), puisque $M_k \subset M_{m-1}$ d'après (9) et (17_g), et d'autre part $N_{m-1} = F_m$ d'après (9), d'où $N_{m-1} \cdot G \neq 0$ d'après (18_g); il reste donc à substituer dans (13) le point g à q' et un point quelconque de $N_{m-1} \cdot G$ à q'' . Pour J_d le raisonnement est symétrique.

Soient V_g et V_d deux segments verticaux de longueur

$$(25_g) \quad h_g = \frac{h_{m-1} + h_m}{2}, \quad (25_d) \quad h_d = \frac{h_{n-1} + h_n}{2},$$

ayant pour bouts inférieurs les milieux des intervalles J_g et J_d respectivement. Les segments V_g et V_d sont évidemment disjoints des parties verticales de tous les L_i :

$$(26) \quad V_g \cdot W(q) = 0 = V_d \cdot W(q) \quad \text{pour tout } q \in \Phi.$$

Nous allons montrer qu'ils le sont également des parties circulaires des mêmes ensembles:

$$(27) \quad V_g \cdot \Omega(q) = 0 = V_d \cdot \Omega(q) \quad \text{pour tout } q \in \Phi.$$

En effet, considérons d'abord V_g . On déduit de (19), (20), (23) et (25_g) par un simple calcul que ce segment est trop court pour atteindre le niveau $1/(m-1)$ des points les plus bas des $\Omega(q)$ où $q \in \sum_{i=1}^{m-1} F_i$:

$$h_g \leq \left(\frac{1}{m-1} + \frac{2}{3^m} + \frac{1}{m} + \frac{2}{3^{m+1}} \right) \frac{1}{2} < \frac{1}{m-1},$$

et, en vertu de (21), aucun $\Omega(q)$ où $q \in \sum_{i=m}^{\infty} F_i$ ne peut empiéter sur lui, la longueur de J_g étant non inférieure à l_{m-1} conformément à (24_g), donc

à plus forte raison à l_m par suite de (12). En vertu de (6), le segment V_g est donc disjoint de $\Omega(q)$ pour tout $q \in \Phi$.

La démonstration pour le segment V_d est symétrique.

Il résulte de (26) et (27) d'après (6) et (23) que

$$(28) \quad V_g \cdot \sum_{i=1}^{\infty} L_i = 0 = V_d \cdot \sum_{i=1}^{\infty} L_i;$$

c'est le troisième lemme.

Enfin, admettons que

$$(29) \quad m \leq n$$

et menons un segment horizontal H du bout supérieur de V_d jusqu'à la rencontre avec V_g .

Le quatrième lemme est le suivant:

- (30) Si l'intervalle de l'axe d'abscisses compris entre V_g et V_d est libre de points de $\sum_{i=1}^{n-1} F_i$, on a $H \cdot \sum_{i=1}^{\infty} L_i = 0$.

En effet, vu (19), (20), (23) et (25), l'ensemble $\sum_{i=n}^{\infty} L_i$ n'atteint même pas l'ordonnée h_d de H et il n'y a que les L_i où $i=1, 2, \dots, n-1$, à savoir déjà leurs parties $W(q)$, qui la dépassent; or, il n'y en a pas sur le trajet de H en vertu de l'hypothèse.

L'ensemble K . Posons

$$(31) \quad K = \mathcal{C} + \sum_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Ainsi défini, K est d'après (22) un ensemble compact, \mathcal{C} est précisément celui de ses points communs avec l'axe d'abscisses et la propriété (5) de K se trouve manifestement satisfaite.

Il nous faut établir l'autre propriété essentielle de K , à savoir

$$(32) \quad \dim(p, K) = 0 \quad \text{pour tout } p \in \Gamma.$$

Il s'agit donc de construire un entourage arbitrairement petit de $p \in \Gamma$ et dont la frontière soit disjointe de K . Comme K ne descend pas au-dessous de l'axe d'abscisses, il suffit évidemment de définir la partie supérieure F^+ de cette frontière. Elle sera composée de trois segments: deux verticaux et un horizontal unissant leurs bouts supérieurs.

Le cas qui importe est celui où p est un point limite de Φ des deux côtés à la fois, car dans le cas où p est isolé de Φ la construction est banale¹³⁾ et dans celui de convergence unilatérale elle se réduit, par

¹³⁾ C'est pourquoi nous avons exclu le cas de Φ fermé (voir p. 18). Nous pouvions d'ailleurs exclure aussi celui de Φ ouvert, c'est-à-dire de Γ compact, car tout ensemble compact de dimension 0 est non seulement homéomorphe, mais même identique à l'ensemble des bouts d'une courbe, même d'une dendrite (voir H. Gehman, *Concerning acyclic continuous curves*, Transactions of the American Mathematical Society 29 (1927), p. 567).

moitiés, aux deux premières. Nous allons nous borner, pour la même raison, au cas où $(0,0) \neq p \neq (1,0)$.

Admettons donc (14) et soit $\varepsilon > 0$. En vertu de (6), il existe dans le cas en question un indice i tel que F_i a des points situés du côté gauche de p et éloignés de lui de moins que $\varepsilon/8$; nous pouvons évidemment admettre en même temps que $i > 8/\varepsilon$. Soit j un indice analogue pour le côté droit. En désignant par k le majeur de ces deux indices, on a donc

$$(33) \quad \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

En tenant compte de (9), désignons par g et d respectivement les points de M_k les plus proches de p à gauche et à droite. On a donc (15), (16) et (q désignant la distance)

$$(34) \quad q(g,p) < \varepsilon/8, \quad q(d,p) < \varepsilon/8,$$

$$(35) \quad M_k \cdot (G + p + D) = 0,$$

G et D étant définis par g et d comme précédemment.

Soit m le plus petit indice pour lequel $M_m \cdot (G + p + D) \neq 0$ ou — ce qui revient au même d'après (9) — tel que

$$(36) \quad F_m \cdot (G + p + D) \neq 0.$$

Un tel m existe, puisque $p \in \sum_{i=1}^{\infty} F_i - \sum_{i=1}^{\infty} F_i$. On a à la suite de (35)

l'inégalité (17_a) et, par raison de symétrie, on peut admettre à la suite de (36) que c'est l'inégalité (18_a) qui se présente.

Passons à l'intervalle D . Soit n le plus petit indice satisfaisant à (18_a). On a donc (29) et

$$(37) \quad m = n \text{ équivaut à } F_m \cdot D \neq 0.$$

En outre, la définition de n implique que

$$(38) \quad D \cdot \sum_{i=1}^{n-1} F_i = 0.$$

J_d étant l'intervalle quelconque contigu à \mathcal{C} , assujéti à (24_a) et dont l'existence se déduit de (13), symétriquement à celle de J_g , le segment vertical V_d de longueur h_d définie par (25_a) satisfait à (28).

Ceci établi, formons la ligne brisée F^+ .

L'ensemble $G \cdot \sum_{i=1}^n F_i$ n'étant pas vide en vertu de (18_a) et (29), soit b le point de cet ensemble le plus proche de p . En vertu des définitions de m et n , on a

$$(39) \quad b \in F_j \text{ pour un } j = m, m+1, \dots, n$$

et b se trouve du côté gauche de p . Comme $m \leq j$, on a $k < j$ d'après (17_a), d'où $d \in M_{j-1}$ d'après (9) et (15_a). Nous pouvons par conséquent appliquer (13) en y substituant $j-1$ à k , le point d à q' et le point $b \in F_j = N_{j-1}$ à q'' . Il existe donc entre b et d un intervalle J contigu à \mathcal{C} de longueur au moins égale à l_{j-1} .

Deux cas peuvent se présenter:

1° J est situé à gauche de p . Nous pouvons alors considérer l'intervalle $b < x < p$ comme G et l'intervalle J comme J_g , avec j au lieu de m . Le segment vertical V de longueur $(h_{j-1} + h_j)/2$ conforme à (25_g) vient donc jouer le rôle de V_g et l'application du lemme (28) donne $V \cdot \sum_{i=1}^{\infty} L_i = 0$.

Comme V_d n'est pas plus haut que V ; puisque $j \leq n$ d'après (38), le segment horizontal H , mené du bout supérieur de V_d vers la gauche, rencontre V , ce qui permet d'appliquer le lemme (30), pourvu que son hypothèse soit satisfaite. Elle l'est en effet, car en vertu de (39) et d'après les définitions de b et d , il n'y a pas de points de $\sum_{i=1}^{n-1} F_i$ dans l'intervalle $b < x < d$.

Il suffit donc de poser $F^+ = V' + H + V_d$, en désignant par V' la partie de V située au-dessous de H (voir fig. 3).

En particulier, lorsque $j = n$ (donc à plus forte raison lorsque $m = n$), on a évidemment $V' = V$.

2° J est situé à droite de p . Alors, en vue d'appliquer le lemme (30), on assignera le rôle de J_d à J et celui de V_d à V , défini comme dans le cas 1°, donc de longueur $(h_{j-1} + h_j)/2$. Pour faire correspondre à J un intervalle I du côté gauche de p (et qui jouerait donc le rôle de J_g), remarquons qu'il y a des points de M_{j-1} à gauche de b : tel est, par exemple, le point g en vertu de (9) et (15), puisque $k < j$. Soit $a \in M_{j-1}$ le point le plus proche de p et situé à gauche de b . Par conséquent $g \leq a < b < p$ et comme $b \in N_{j-1}$ en vertu de (6), (9) et (38), l'intervalle $a < x < b$ contient en vertu de (13) un sous-intervalle I contigu à \mathcal{C} de longueur au moins égale à l_{j-1} . En vertu du lemme (28), le segment vertical U de longueur $(h_{j-1} + h_j)/2$, donc égale à celle de V , et ayant son

bout inférieur au milieu de I est disjoint de l'ensemble $\sum_{i=1}^{\infty} L_i$. En vertu du lemme (30), en y substituant j à n , le segment horizontal H' unissant les bouts supérieurs de U et V est donc disjoint du même ensemble, puisque entre U et V , voire même dans l'intervalle $a < x < d$, il n'y a pas de points de $\sum_{i=1}^{j-1} F_i$: en effet, il n'y en a ni entre a et p d'après les définitions de a et b , ni entre p et d (c'est-à-dire dans D) d'après la définition de n , puisque $j \leq n$ d'après (39).

On peut donc poser $F^+ = U + H' + V$ (voir fig. 4).

Ainsi, dans les deux cas possibles, F^+ est disjoint de \mathcal{C} et de $\sum_{i=1}^{\infty} L_i$. Par conséquent $F^+ \cdot K = 0$ d'après (31).

Dernière précaution (en rapport avec la propriété (1) de la dendrite \mathcal{L}): s'il y a entre les bouts de F^+ des intervalles contigus à \mathcal{C} et plus longs que l'un quelconque de ceux dans lesquels ces bouts sont situés, on peut s'en débarrasser de la façon suivante.

Soient I_g et I_d les intervalles contigus à \mathcal{C} qui contiennent les bouts gauche et droit de F^+ respectivement. Admettons pour fixer les idées que I_g est tout au moins aussi long que I_d . S'il existe entre p et I_d des intervalles contigus à \mathcal{C} et qui dépassent I_d en longueur, choisissons-en celui qui est le plus proche de p et désignons-le par I'_d ; sinon posons $I'_d = I_d$. Il peut y avoir encore entre I_g et p des intervalles contigus à \mathcal{C} et dépassant en longueur celui des intervalles I_g et I'_d qui n'est pas plus long que l'autre. S'il y en a, soit I'_g celui d'entre eux qui est le plus proche de p ; sinon posons $I'_g = I_g$. Il est clair qu'il n'existe entre I'_g et I'_d aucun intervalle contigu à \mathcal{C} et qui dépasse en longueur l'un quelconque des deux.

Remplaçons les côtés verticaux de F^+ par les segments verticaux élevés aux milieux des intervalles I'_g et I'_d jusqu'au côté horizontal de F^+ et, bien entendu, raccourcissons convenablement ce dernier. Grâce à (21), les nouveaux côtés verticaux satisferont à (26) — donc aussi à (27) — à plus forte raison que V_g et V_d , de sorte que F^+ ainsi rétréci restera disjoint de K . Nous pouvons par conséquent admettre d'emblée que

(40) *Il n'y a entre les bouts de F^+ aucun intervalle contigu à \mathcal{C} et dépassant en longueur l'un quelconque de ceux qui contiennent ces bouts.*

Ceci noté, désignons par F^- le demi-carreau unissant les bouts de F^+ . L'ensemble $F^+ + F^-$ est donc une courbe simple fermée contenant à l'intérieur le point p et disjointe de K .

Il nous reste à évaluer le diamètre de cette courbe. Le côté horizontal de F^+ est par définition plus court que l'intervalle $g < x < d$; sa longueur est donc inférieure à $\varepsilon/4$ en vertu de (34). Celle du côté vertical de F^+ ne dépasse par définition le nombre h_g en aucun cas; en vertu de (19), (20) et (25), elle est donc inférieure à

$$h_{m-1} = \frac{1}{m-1} + 2r_{m-1} = \frac{1}{m-1} + 2 \min\left(\frac{1}{3^m}, \frac{l_{m-1}}{8}\right).$$

On a $1/(m-1) < \varepsilon/8$ en vertu de (17_g) et (33); l'intervalle $g < x < p$ contenant un intervalle J_g de longueur l_{m-1} d'après (24_g), on a $l_{m-1} \leq \varepsilon/8$ en vertu de (34), d'où

$$h_{m-1} < \frac{\varepsilon}{8} + 2 \min\left(\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon}{8^2}\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Le diamètre de F^+ est donc inférieur à $\sqrt{\varepsilon^2/8} < \varepsilon/2$ et, comme celui de F^- l'est à la longueur de l'intervalle $g < x < d$, donc à $\varepsilon/4$, la courbe $F^+ + F^-$ est de diamètre moindre que $\varepsilon/2 + \varepsilon/4 < \varepsilon$.

La propriété (32) de K se trouve ainsi établie.

Par contre, d'après (23) et (31),

$$(41) \quad \text{ord}(q, K) > 1 \quad \text{pour tout } q \in K - \mathcal{C},$$

car $W(q) + \Omega(q)$ n'a par définition qu'un seul point d'ordre 1 et qui appartient à \mathcal{C} .

La courbe \mathcal{C} . \mathcal{C} désignant à nouveau, en particulier dans la formule (31), l'ensemble de Cantor sur le segment $0 \leq x \leq 1$ de l'axe d'abscisses, soit (voir fig. 1)

$$(42) \quad \mathcal{C} = \Delta + K.$$

Ainsi défini, l'ensemble \mathcal{C} est une courbe. En effet, toute composante de K contenant d'après (31) un point de $\mathcal{C} \cap \Delta$ et Δ étant une dendrite, donc un ensemble connexe, \mathcal{C} est un ensemble connexe¹⁴. Les deux sommantes de (42) étant des ensembles compacts, \mathcal{C} est un continu.

En vertu de (23), tout L_i est compact et il est de dimension 1 comme composé de deux produits cartésiens de l'ensemble compact F_i de dimension nulle: l'un par un segment et l'autre par une circonférence.

Par conséquent, la somme $\sum_{i=1}^{\infty} L_i$ est aussi de dimension 1. En vertu de (31), il en est donc de même de K . Comme somme d'une dendrite et d'un ensemble compact de dimension 1, le continu \mathcal{C} est également de cette dimension, c'est-à-dire une courbe.

Examinons l'ordre de ses points. En vertu de (2), l'ordre de tous ceux dont l'ordonnée est négative dépasse 1 et, en vertu de (41), il en est de même des points d'ordonnée positive. Il en est encore de même de tous les points $q \in \Phi$. En effet, $q \in W(q)$. La frontière de tout entourage plan de q de diamètre suffisamment petit a donc au moins un point commun d'ordonnée positive avec $W(q) \subset K$. Comme $q \in \mathcal{C}$ d'après (4), on a $q \in \Delta$ d'après (2), de sorte que cette frontière a en même temps au moins un point commun d'ordonnée négative avec Δ . Vu (42), elle a donc avec la courbe \mathcal{C} au moins deux points communs:

$$\text{ord}(q, \mathcal{C}) > 1 \quad \text{pour tout } q \in \Phi.$$

Soit enfin $p \in \Gamma$. Nous avons construit des entourages arbitrairement petits de p de frontière $F^+ + F^-$ disjointe de K . Comme \mathcal{C} est un

¹⁴ B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, *Fundamenta Mathematicae* 2 (1921), p. 210.

continu, elle n'est donc pas disjointe de $C - K = \Delta - K = \Delta - C$, de sorte que sa partie commune avec C est d'ordonnée négative:

$$(F^+ + F^-) \cdot C = F^- \cdot \Delta.$$

Les bouts de F^- coïncidant par définition avec ceux de F^+ , cette partie commune se réduit à un seul point en vertu de (1) et (40). Le point p est donc un bout de la courbe C . Ainsi $\Gamma = C^1$, c. q. f. d.

Remarques. Il est naturel de se demander si la construction de la courbe C , en particulier de sa partie K , ne gagnerait en simplicité si l'on supprime les segments $W(q)$ de manière que les boucles $\mathcal{L}(q)$, qu'ils portent, deviennent tangentes à l'axe d'abscisses aux points q (ou encore en les remplaçant par d'autres figures). La démonstration, notamment celle de la dimension 0 de K aux points de Γ , ne s'en trouverait-elle abrégée? Nous ne pouvons pas le confirmer.

Une autre démonstration, basée sur l'application directe du théorème de Cantor-Bendixson à l'ensemble Φ , a été proposée par M. Reichbach. Elle n'a pas l'avantage d'être plus courte et ne fait pas ressortir certaines propriétés générales, susceptibles à d'autres applications. Telles sont, entre autres, les propriétés de l'ensemble K . Elles n'exigent pas l'hypothèse que le discontinu C soit précisément celui de Cantor; nous l'avons d'ailleurs mentionné explicitement. Le recours aux propriétés spécifiques de ce dernier ne semble même pas pouvoir contribuer à simplifier les raisonnements.

La précaution (40) est essentielle: un point p peut être d'ordre fini m dans un ensemble compact M et d'ordre $n \leq m$ dans un autre ensemble compact N , en même temps que d'ordre arbitraire $s = m, m+1, m+2, \dots, \aleph_0$ dans la "somme $M + N$ "¹⁵⁾. Voici un exemple pour $m=1$, (comme dans Δ), $n=0$ (comme dans K) et $s=2$:

S désignant la spirale $\varrho = 2^{-\vartheta/2\pi}$ où $0 \leq \vartheta \leq \infty$, soit T_k , pour $k=1, 2, \dots$, le segment de la tangente à S au point $\varrho = 2^{-k-1}$ l'unissant au premier point d'intersection avec S d'ordonnée négative; soient enfin M et N les parties inférieure et supérieure respectivement de la courbe

$$C = S + \sum_{k=1}^{\infty} T_k$$

par rapport à la droite $\vartheta=0$. Le point $\varrho=0$ est manifestement d'ordre 1 dans l'ensemble compact M et d'ordre 0 dans l'ensemble compact N , mais il est d'ordre 2 dans leur somme C (il est peut-être intéressant de remarquer que le phénomène est délicat: il suffit de remplacer dans la définition des segments T_k le mot „négative“ par le mot „positive“ pour que le point $\varrho=0$ devienne d'ordre 1 dans C).

¹⁵⁾ Voir C. Kuratowski, *Topologie II*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1950, p. 210 (mon exemple). Le cas est celui de $m=n=2$ et $s=\aleph_0$, si l'on prend comme p un point irrationnel quelconque de l'intervalle $0 < x < 1$ de l'axe des x .

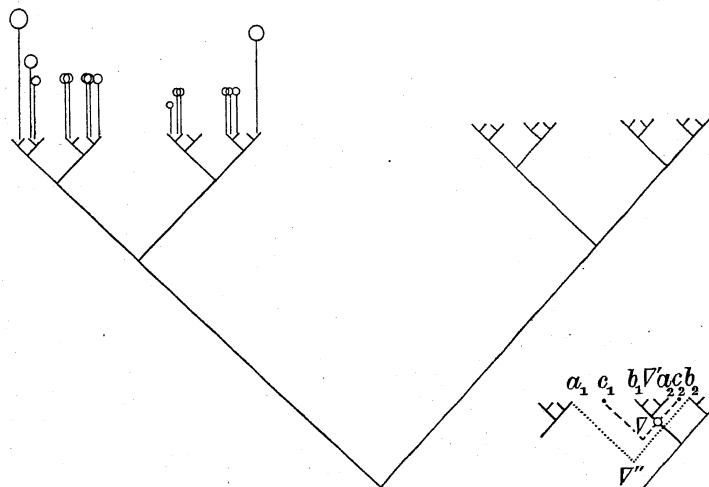


Fig. 1.

Fig. 2.

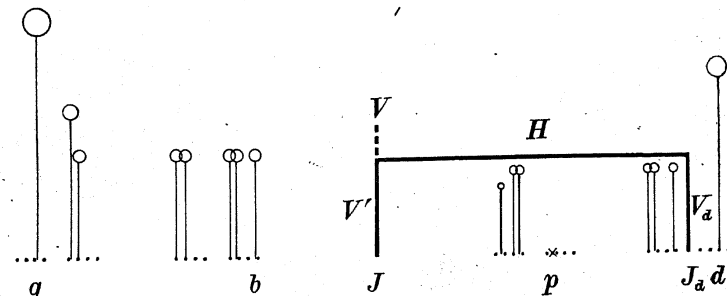


Fig. 3.

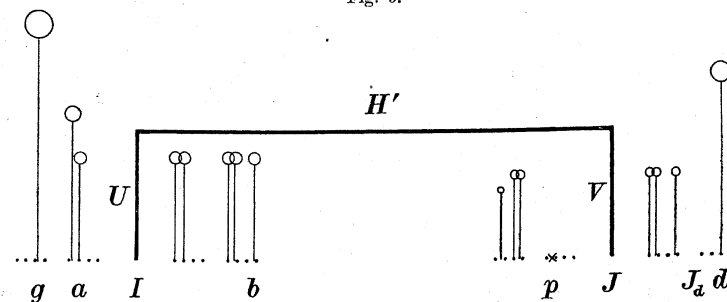


Fig. 4.

Les remarques qui précèdent ne concernent, bien entendu, que la démonstration de l'existence de la courbe C plane ayant pour l'ensemble de ses bouts l'ensemble $\Gamma C C$ quelconque, donné d'avance. Si l'on renonce à la première de ces conditions, on peut remplacer, pour tout $q \in \Phi$, l'ensemble $W(q) + \Omega(q)$ par la circonférence de rayon égal à celui de $\Omega(q)$, mais située dans la moitié $z \geq 0$ du plan $x = q$ et passant par le point $(q, 0, 0)$. La démonstration devient alors tout à fait simple.

La construction continue cependant de fournir les courbes C non localement connexes aux points de $W(q) - \Omega(q)$ toutes les fois que q est un point-limite d'un sommande F_i de la série (6), c'est-à-dire lorsqu'il y existe un F_i infini, voire parfait — cas inévitable avec des G_δ $\Gamma C C$ arbitraires. M^r Kuratowski nous a posé donc la question si tout ensemble B qui est un G_δ de dimension nulle est homéomorphe à l'ensemble des bouts d'une courbe C localement connexe. Or, si l'on renonce à la seconde condition du théorème, on peut (sans modifier essentiellement la construction) ramener cette question à celle du choix convenable d'un $\Gamma C C$ homéomorphe à B . La solution sera publiée dans un autre travail¹⁶⁾ sous la forme de celle du problème suivant¹⁷⁾, qui nous semble présenter l'intérêt pour la topologie des courbes: le théorème (p. 17) subsiste-t-il en demandant que la courbe C dont il y est question soit une dendrite? En d'autres termes, un G_δ de dimension 0 est-il toujours homéomorphe à l'ensemble de tous les bouts d'une dendrite?

Institut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences

¹⁶⁾ B. Knaster et K. Urbanik, *Sur les espaces complets s'parables de dimension 0*, ce volume, p. 194-202.

¹⁷⁾ Nous devons ce problème à E. Čech.

An Example of an Absolute Neighbourhood Retract, Which Is the Common Boundary of Three Regions in the 3-dimensional Euclidean Space

By

M. Lubański (Warszawa)

1. Introduction. Continuum K lying in an n -dimensional Euclidean space E_n is said to show the *phenomenon of Brouwer* [1] if it disconnects the space E_n into m ($m \geq 3$) regions and is their common boundary.

Examples of plane continua showing the above phenomenon have been given by L. E. J. Brouwer [2], A. Denjoy [3], Yoneyama [4] and B. Knaster [5]. All those continua have a highly complicated topological structure. According to C. Kuratowski [6], the complication of their structure is not accidental, because every such plane continuum is either an indecomposable continuum or a sum of two indecomposable continua.

An absolute neighbourhood retract¹⁾ R is said to show the *phenomenon of Mazurkiewicz* [1] if it cannot be decomposed into a finite sum of absolute retracts whose diameters are smaller than the diameter of R .

Examples of absolute retracts showing the latter phenomenon have been given by K. Borsuk and S. Mazurkiewicz [7].

The aim of this paper is to establish the following

Theorem. *There exists an absolute neighbourhood retract $0 \neq WC E_3$ which shows the phenomenon of Brouwer and which can be decomposed into a finite sum of absolute retracts, whose diameters are arbitrarily small²⁾.*

¹⁾ A subset A of a space E is called a *retract* of E , if there exists a continuous mapping f (called a *retraction*) of E onto A , so that $f(x) = x$ for every $x \in A$. A compactum A is said to be an *absolute retract* resp. *absolute neighbourhood retract*, provided it is a retract of every space $E \supset A$ resp. of some neighbourhood in E . See K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. 17 (1931), p. 152-170 and K. Borsuk, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. 19 (1932), p. 220-242.

²⁾ The first example of an absolute neighbourhood retract which is the common boundary of three regions of the 3-dimensional Euclidean space was given by Mr. Gruba in 1937. That paper was never published and its manuscript was lost during the last war. It is not certain whether the absolute neighbourhood retract constructed by Mr. Gruba was decomposable into a finite sum of arbitrarily small absolute retracts.