

Sur les espaces complets séparables de dimension 0

Par

B. Knaster et K. Urbanik (Wrocław)

(dédié à M^r W. Sierpiński au 71^{me} anniversaire de sa naissance)

1. Théorèmes. Soit \mathcal{J} l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, \mathcal{C} l'ensemble parfait non-dense de Cantor sur \mathcal{J} et $B = B_g + B_d$ l'ensemble des bouts des intervalles contigus à \mathcal{C} , B_g et B_d désignant respectivement celui des bouts gauches et celui des bouts droits de ces intervalles. Le point 1 de \mathcal{J} est considéré comme bout gauche de l'intervalle contigu contenant le point à l'infini. Les ensembles B_g et B_d étant symétriques et disjoints, convenons de désigner par B_u (ensemble des bouts unilatéraux) l'un quelconque des deux ensembles. Donc $u = g$ ou d .

La notion d'espaces complets séparables coïncidant au point de vue topologique avec celle de G_δ situés dans le cube de Hilbert, nous désignons ces espaces par G_δ tout court.

Nous allons établir les théorèmes suivants:

I. *Tout G_δ de dimension 0 est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de \mathcal{C} privé tout au plus de certains points de B_u .*

II. *Tout G_δ de dimension 0 dense en soi est homéomorphe à l'ensemble \mathcal{C} privé tout au plus de certains points de B_u .*

III. *Si $D \subset \mathcal{C}$ est au plus dénombrable, l'ensemble $\mathcal{C} - D$ est homéomorphe à l'ensemble \mathcal{C} privé tout au plus de certains points de B_u .*

IV. *Tout ensemble clairsemé est homéomorphe à un sous-ensemble d'un ensemble compact bien ordonné (suivant la grandeur) situé dans B_u .*

V. *Tout G_δ de dimension 0 est homéomorphe à l'ensemble de tous les bouts d'une dendrite n'ayant les points de ramification que d'ordre 3.*

Les théorèmes I-IV sont des solutions d'autant de problèmes posés par l'un de nous (Knaster). Le théorème I n'est qu'une variante d'un théorème connu, mais il est mis dans cette forme en vue d'applications, à savoir pour en déduire les théorèmes IV et V. Le théorème II est une modification de celui de S. Mazurkiewicz d'après lequel tout G_δ dense et frontière dans un espace séparable complet de dimension 0 est homéomorphe à l'ensemble \mathcal{N} des points de \mathcal{J} qui sont irrationnels dans le sy-

stème dyadique de numération¹⁾, donc aussi à l'ensemble $\mathcal{C} - B_u$ (en vertu du même théorème). *Dense et frontière* — en particulier dans \mathcal{C} — étant une hypothèse plus restrictive que *dense en soi de dimension 0*, la thèse qui résulte l'est aussi: $\mathcal{C} - B_u$ au lieu de $\mathcal{C} - E$ où $E \subset B_u$. Le théorème III est un corollaire du théorème II. Le théorème IV dépasse par sa précision la solution du problème, posé d'abord en ces termes: les ensembles clairsemés (c'est-à-dire dépourvus de sous-ensembles denses en soi et non-vides), donc en tout cas dénombrables, sont-ils homéomorphes aux sous-ensembles d'ensembles compacts dénombrables? ²⁾ L'ensemble \mathcal{M} des milieux des intervalles contigus à \mathcal{C} est, par exemple, homéomorphe à celui H des points $1/n$ où $n = 1, 2, \dots$; pourtant $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{C}$, tandis que $\overline{H} = H + (0)$. Mais déjà en ajoutant à \mathcal{M} un point quelconque de B_u , la tâche devient plus délicate. Enfin, le théorème V est la solution d'un problème posé par E. Čech³⁾.

Les démonstrations de ces théorèmes seront suivies de remarques concernant des problèmes ouverts.

2. Démonstrations. Nous aurons recours aux théorèmes suivants:

1. *Tout G_δ de dimension 0 est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de \mathcal{N} ⁴⁾.*

2. *\mathcal{N} est homéomorphe à $\mathcal{C} - B_u$ — conséquence mentionnée du théorème précité de Mazurkiewicz.*

3. *Tout ensemble parfait non-dense P situé sur un segment de droite est semblable à \mathcal{C} (au sens de la théorie des ensembles ordonnés) et cette similitude est une homéomorphie.*

¹⁾ Cf. [1], p. 349. où \mathcal{N} désigne l'ensemble des points irrationnels de la droite. Cela revient au même, les deux ensembles en question étant notoirement homéomorphes et même semblables, cette similitude ayant d'ailleurs un prolongement sur \mathcal{J} (voir [2], p. 171; voir aussi [3], p. 52-54).

²⁾ Les problèmes liés à la classification topologique des ensembles clairsemés ont été l'objet d'une correspondance entre nous et M^r Sierpiński.

³⁾ Voir [4], p. 28. D'après le théorème qui y est démontré p. 17, tout G_δ situé dans \mathcal{C} est l'ensemble des bouts d'une courbe (c'est-à-dire d'un continu de dimension 1), ce qui n'est pas le cas pour certains G_δ situés dans \mathcal{J} (pour l'ensemble \mathcal{N} par exemple). Mais, parmi les courbes (planes et spatiales) ayant tous leurs bouts dans \mathcal{C} , il y a qui, nécessairement, ne sont pas localement connexes (c'est-à-dire qui ne sont pas des images continues de \mathcal{J}). Si l'on exige qu'elles le soient (problème de C. Kuratowski), ou même qu'elles soient des dendrites (problème de E. Čech), il faut renoncer à l'hypothèse de la situation arbitraire des G_δ donnés dans \mathcal{C} et les y remplacer par des images homéomorphes convenablement choisies. Le théorème V montre que c'est toujours possible. Toute dendrite étant une courbe localement connexe par définition, le problème de C. Kuratowski se trouve résolu simultanément.

⁴⁾ Voir [1], p. 337 et 348. Pour la différence de notation voir le renvoi¹⁾ qui précède.

En effet, on peut évidemment se borner au cas où les points extrêmes de \mathcal{C} et de P coïncident. La décomposition

$$\mathcal{C} = \sum_{0 \leq y < 1} E_y$$

en sous-ensembles disjoints E_y , qui sont les points 0 et 1, points individuels de $\mathcal{C}-B$ et couples des bouts des intervalles bornés contigus à \mathcal{C} est semi-continue, c'est-à-dire telle que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ entraîne $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{y_n} \subset E_y$.

La fonction continue s (fonction scalariforme de Cantor) qui transforme \mathcal{I} en \mathcal{J} de façon que $s(\mathcal{C}) = \mathcal{J}$ établit — comme on sait — une telle décomposition de \mathcal{C} en ensembles $E_y = s^{-1}(y)$. On peut s'en servir pour ordonner sans sauts ni lacunes la famille \mathcal{C} des E_y en posant $E_{y_1} \prec E_{y_2}$ lorsque $y_1 < y_2$.

On peut aussi y parvenir directement, comme nous allons le faire pour l'ensemble P . Soient N l'ensemble des bouts des intervalles bornés contigus à P et \mathfrak{F} la famille des ensembles T_y qui sont les points individuels de $P-N$ et les couples des bouts de chacun de ces intervalles. En posant $T_{y_1} \prec T_{y_2}$ lorsque l'inégalité $x_1 < x_2$ se présente pour un $x_1 \in T_{y_1}$ et un $x_2 \in T_{y_2}$, la famille \mathfrak{F} se trouve ordonnée. Elle l'est sans sauts, puisque entre deux T_{y_1} et T_{y_2} quelconques il y a des intervalles contigus (P étant non-dense) et sans lacunes (ce qui est une conséquence facile de leur absence dans P , qui est parfait).

Les intervalles contigus à \mathcal{C} , et par suite les couples de leurs bouts, étant disposés sur \mathcal{J} d'une manière dense (au sens de l'ordre), c'est-à-dire qu'entre tous deux il y'en a d'autres, la famille \mathcal{C} des E_y qui sont des couples de points est dense dans \mathcal{C} en vertu de la définition de \prec . Comme dense et dénombrable, \mathcal{C} est du type η . Pour les mêmes raisons, il en est de même de la famille $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{F}$ des $T_y \cap N$.

Il existe donc une similitude $q(\mathcal{C}) = \mathfrak{I}$ et elle se laisse prolonger aussitôt, par le procédé connu, à une similitude $q^*(\mathcal{C}) = \mathfrak{F}$ ⁵⁾.

Un couple de points $CC\mathcal{J}$ étant donné, soient $g(C)$ et $d(C)$ ses points gauche et droit respectivement.

⁵⁾ Voir [3], p. 54. Il est remarquable que le théorème d'après lequel cette similitude est une homéomorphie lorsque \mathcal{C} et \mathfrak{F} sont compacts, n'est pas formulé dans les traités en termes exprés. Pourtant ce simple théorème n'est pas sans importance, car la similitude $s(\mathcal{C}-B_y) = \mathcal{H}$ par exemple n'est pas une homéomorphie et le saut — notion qui est un invariant de similitude — n'est point un invariant d'homéomorphie (déjà pour les $G_\delta\mathcal{J}$). Ainsi, tous les sauts dans \mathcal{C} privé d'un ensemble dense dénombrable $D \subset \mathcal{C}-B$ disparaissent par toute homéomorphie $h(\mathcal{C}-D) = \mathcal{H}$.

Le théorème en question peut être exprimé aussi en ces termes: toute fonction réelle monotone d'une variable réelle qui transforme l'ensemble compact en ensemble compact est continue.

La fonction biunivoque

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x=0, \\ q^*(E_y) & \text{pour } (x) = E_y, \\ g[q(E_y)] & \text{pour } x = g(E_y) \\ d[q(E_y)] & \text{pour } x = d(E_y) \\ 1 & \text{pour } x=1 \end{cases} \begin{cases} \text{lorsque } E_y \subset \mathcal{C}-B, \\ \\ \text{lorsque } E_y \subset B. \end{cases}$$

est une similitude entre \mathcal{C} et P , ce qu'on peut vérifier directement par l'énumération des cas.

Pour montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = P$ est une homéomorphie (ce qui est d'ailleurs vrai pour toute similitude entre ensembles compacts), il reste à établir la continuité de $\sigma(x)$, les ensembles \mathcal{C} et P étant compacts. Soit donc $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ où x et x_n sont des points de \mathcal{C} . Par raison de symétrie, on peut se borner aux suites croissantes, toute suite convergente de points de \mathcal{J} se décomposant en deux suites monotones (vides ou non). Par raison de similitude, $x_1 < x_2 < \dots < x$ entraîne $\sigma(x_1) < \sigma(x_2) < \dots < \sigma(x)$. La suite bornée $\{\sigma(x_n)\}$ est donc convergente et, P étant compact, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) \in P$, en même temps que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) \leq \sigma(x)$. Enfin, l'inégalité $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) < \sigma(x)$ est impossible, car on aurait alors par suite de similitude $\sigma^{-1}(x_n) = x_n < \sigma^{-1}[\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n)] < \sigma^{-1}(x) = x$, d'où $x - x_n > \sigma^{-1}[\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n)] - x_n$ pour tous les $n=1, 2, \dots$, contrairement à l'hypothèse que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

4. $P \subset \mathcal{C}$ étant un ensemble parfait, tous les points $x \in P \cdot B_y$ sont des bouts gauches (et tous les $x \in P \cdot B_d$ sont des bouts droits) d'intervalles contigus à P .

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait dans P , qui est parfait, une suite $\{\sigma(x_n)\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) = \sigma(x) \in P$ et $\sigma(x_1) > \sigma(x_2) > \dots > \sigma(x)$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathcal{C}$ et $x_1 > x_2 > \dots > x$ en vertu du théorème 3, σ étant une similitude. Mais c'est incompatible avec l'hypothèse que $x \in B_y$.

Passons aux démonstrations des théorèmes I-V.

Ad I. Soit Γ un G_δ de dimension 0. Il existe en vertu des théorèmes 1 et 2 une homéomorphie h telle que $h(\Gamma)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}-B_u$. On a donc

$$h(\Gamma) = \overline{h(\Gamma)} \cdot (\mathcal{C}-B_u) = \overline{h(\Gamma)} \cdot \mathcal{C} - \overline{h(\Gamma)} \cdot B_u = \overline{h(\Gamma)} - \overline{h(\Gamma)} \cdot B_u,$$

puisque $\overline{h(\Gamma)} \subset \mathcal{C}$.

Ad II. Si Γ est, en outre, dense en soi, l'ensemble $\overline{h(\Gamma)}$ est parfait et il est non-dense comme sous-ensemble de \mathcal{C} . On a en vertu du théorème I (voir la formule)

$$\overline{h(\Gamma)} - h(\Gamma) = \overline{h(\Gamma)} \cdot B_u \subset B_u;$$

l'ensemble parfait non-dense $P = \overline{h(I)}$ ne diffère donc de $h(I)$ que par certains points de B_u , qui sont par conséquent, en vertu du théorème 4, autant des bouts homologues (c'est-à-dire unilatéraux du même indice g ou d) d'intervalles contigus à P . L'homéomorphie par similitude $s(P) = \mathcal{C}$, qui existe en vertu du théorème 3, les transforme donc en bouts homologues d'intervalles contigus à \mathcal{C} , c'est-à-dire de nouveau en certains points de B_u . On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{C} - sh(I) &= s(P) - sh(I) = s[\overline{h(I)}] - sh(I) = s[\overline{h(I)} - h(I)] \\ &= s[h(I) \cdot B_u] = s(P \cdot B_u) \subset B_u, \end{aligned}$$

sh étant, par définition, une homéomorphie. Comme $sh(I) \subset \mathcal{C}$, on a $sh(I) = \mathcal{C} - [\mathcal{C} - sh(I)]$. On voit donc que $sh(I)$ ne diffère de \mathcal{C} que par certains points de B_u .

Ad III. En vertu de l'hypothèse, $\mathcal{C} - D$ est un G_δ dense en soi de dimension 0. On n'a donc qu'à appliquer le théorème II.

Le problème s'impose: combien y a-t-il de *types topologiques* des G_δ denses en soi de dimension 0 (c'est-à-dire qui, deux à deux, ne sont pas homéomorphes)?

Ad IV. Soit I un ensemble clairsemé. Tout ensemble clairsemé étant de dimension 0 (puisqu'il est dénombrable), il existe une homéomorphie telle que $h(I) \subset \mathcal{C}$. Tout ensemble clairsemé étant en même temps un G_δ ⁶⁾, cette homéomorphie peut être choisie de façon que $\overline{h(I)} - h(I) \subset B_u$. Il en résulte que l'ensemble $\overline{h(I)} = h(I) + [\overline{h(I)} - h(I)]$ est au plus dénombrable. Comme compact et dénombrable, $\overline{h(I)}$ est homéomorphe à un ensemble bien ordonné⁷⁾. Tout ensemble bien ordonné dénombrable étant notoirement homéomorphe par similitude à un ensemble bien ordonné de n'importe quel ensemble dense en soi (non-vide), $\overline{h(I)}$ est homéomorphe en particulier à un sous-ensemble compact bien ordonné de B_u . Reste à ajouter que $h(I) \subset \overline{h(I)}$.

Rappelons qu'il existe exactement s_1 types topologiques d'ensembles clairsemés compacts⁸⁾ et par conséquent autant des types topologiques des G_δ dont la partie dense en soi et la partie clairsemée (dans la décomposition de Cantor-Bendixson) sont — respectivement — l'une homéomorphe à \mathcal{N} et l'autre compacte; ces parties sont, en effet, des invariants d'homéomorphie. Cependant il n'existe qu'un seul type topologique des G_δ qui diffèrent de \mathcal{C} par des ensembles clairsemés compacts; ces G_δ sont, en effet, des ensembles ouverts dans \mathcal{C} , donc homéomorphes à \mathcal{C} privé d'un seul point⁹⁾ — et le choix de ce point est indifférent, l'ensemble \mathcal{C} étant homogène.

⁶⁾ Voir [5], p. 65.

⁷⁾ Voir [6], p. 21.

⁸⁾ Voir [6], p. 22.

⁹⁾ Voir [7], p. 93.

Le problème posé à la suite du théorème II reste donc ouvert en particulier pour les G_δ denses en soi ne différant de \mathcal{C} que par des ensembles clairsemés non-compacts (qui peuvent être supposés situés dans B_u en vertu du théorème III).

Ad V. Soit Γ un G_δ quelconque de dimension 0, supposé plongé par homéomorphie dans l'ensemble \mathcal{C} de manière que $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup B_g$. Un tel plongement existe en vertu du théorème I (en y considérant $h(I)$ comme le G_δ donné). On peut évidemment l'effectuer de façon que les points 0 et 1 n'appartiennent pas à $\overline{\Gamma}$.

La dendrite \mathcal{V} ayant Γ pour l'ensemble de ses bouts sera construite à l'aide d'une dendrite Δ ¹⁰⁾ dont l'ensemble des bouts est \mathcal{C} tout entier. Δ se compose de tous les segments des droites $y = x - \tau$ de longueur $\sqrt{\tau/2k}$ ayant le point $(\tau, 0)$ où $\tau = k/3^i$ pour bout supérieur, τ parcourant B_g (les numérateurs k étant donc impairs) et de tous les segments symétriques aux précédents par rapport à la droite $x = 1/2$. Ainsi définie, la dendrite Δ est formée de deux dendrites superposables Δ_0 et Δ_1 , géométriquement semblables à Δ (en échelle 1:3) et d'une ligne brisée \mathcal{V} composée de deux segments ayant pour bout commun le point $s = (1/2, -1/2)$ que nous appellerons le *sommet* de Δ . La ligne brisée \mathcal{V} unit les sommets s_0 de Δ_0 et s_1 de Δ_1 . La subdivision analogue de Δ_0 en Δ_{00} , \mathcal{V}_0 et Δ_{01} , de même que de Δ_1 en Δ_{10} , \mathcal{V}_1 et Δ_{11} et ainsi de suite, correspond à celle de l'ensemble de leurs bouts, c'est à dire de \mathcal{C} , en segments (au sens de la théorie des ensembles ordonnés) C_0 , C_1 , C_{00} , C_{01} et ainsi de suite, géométriquement semblables à \mathcal{C} en échelles 1:3, 1:3², ... suivant le nombre d'indices, et qui constituent une *base* (au sens de l'axiome \mathcal{V} de Kuratowski) d'ensembles fermés-ouverts dans \mathcal{C} . Plus précisément:

$$C_{m_1 m_2 \dots m_i} = C_{m_1 m_2 \dots m_i 0} + C_{m_1 m_2 \dots m_i 1},$$

$$\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i} = \Delta_{m_1 m_2 \dots m_i 0} + \mathcal{V}_{m_1 m_2 \dots m_i} + \Delta_{m_1 m_2 \dots m_i 1}.$$

les sommandes extrêmes étant, dans les deux formules, disjoints et les indices prenant les valeurs 0 et 1; $C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ est l'ensemble des bouts de la dendrite $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$; $s_{m_1 m_2 \dots m_i} \in \mathcal{V}_{m_1 m_2 \dots m_i}$ est le sommet de la même dendrite et il en est la frontière dans Δ .

L'ensemble de tous les sommets munis d'indices coïncide avec celui des points de ramification de Δ . Ces points sont d'ordre 3. Tout sommet $s_{m_1 m_2 \dots m_i}$ divise la dendrite $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$ en deux ensembles $\mathcal{Y}_{m_1 m_2 \dots m_i 0}$ et $\mathcal{Y}_{m_1 m_2 \dots m_i 1}$, ouverts dans Δ et formés respectivement de la dendrite $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i 0}$ avec le segment gauche et de la dendrite $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i 1}$ avec le

¹⁰⁾ Cette dendrite est définie dans le travail précité de B. Knaster et M. Reichbach, ce volume, p. 14. Nous y renvoyons le lecteur pour les détails dont quelques uns interviennent dans la démonstration qui suit.

segment droit de $V_{m_1 m_2 \dots m_i}$, ces segments étant entendus ici, évidemment, sans leur bout commun

$$s_{m_1 m_2 \dots m_i} = \text{Fr}(Y_{m_1 m_2 \dots m_i, 0}) = \text{Fr}(Y_{m_1 m_2 \dots m_i, 1}).$$

L'ensemble $\Delta - Y_{m_1 m_2 \dots m_i}$ est en conséquence une dendrite (comme connexe, fermé et situé dans Δ) et l'ensemble $\mathcal{C} - C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ est celui de ses bouts.

Tout $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ ouverts dans \mathcal{C} est somme de certains $C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ dis-joints, puisqu'ils sont fermés-ouverts et constituent une base dans \mathcal{C} . En les ordonnant donc en une série $\mathcal{G} = \mathcal{C}^{(0)} + \mathcal{C}^{(2)} + \dots$ suivant le nombre non-décroissant de leurs indices et en convenant de ne pas écrire $C_{m_1 m_2 \dots m_i, 0} + C_{m_1 m_2 \dots m_i, 1}$ au lieu de $C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ lorsque \mathcal{G} le contient, la représentation de \mathcal{G} par cette série est univoque.

Soit Y la somme de tous les $Y_{m_1 m_2 \dots m_i}$ pour lesquels $C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ est un terme de la série représentant \mathcal{G} . On a donc $Y = Y^{(0)} + Y^{(2)} + \dots$ où $Y^{(0)}$ a $\mathcal{C}^{(0)}$ pour l'ensemble de ses bouts ($j=1, 2, \dots$).

Posons $\mathcal{G} = \mathcal{C} - \bar{\Gamma}$. L'ensemble $\Delta - Y$ est donc une dendrite en tant que partie commune de la suite descendante des dendrites

$$\Delta - Y^{(0)}, \quad \Delta - (Y^{(0)} + Y^{(2)}), \quad \dots$$

et l'ensemble $\bar{\Gamma} = \mathcal{C} - \mathcal{G}$ est bien celui des bouts de $\Delta - Y$ en tant que partie commune de la suite descendante d'ensembles

$$\mathcal{C} - \mathcal{C}^{(0)}, \quad \mathcal{C} - (\mathcal{C}^{(0)} + \mathcal{C}^{(2)}), \quad \dots$$

En effet, l'ordre d'un point — et les bouts sont par définition les points d'ordre 1 — étant une fonction monotone d'ensemble et la suite des dendrites en question étant descendante, il suffit de montrer qu'aucun point p de Δ d'ordre supérieur à 1, donc d'ordonnée négative, ne devient d'ordre 1 dans $\Delta - Y$. Or, le diamètre des $Y^{(j)}$ tendant vers 0 par suite de la décroissance infinie de l'échelle et tout $Y^{(j)}$ ayant des points sur l'axe d'abscisses, à savoir ses bouts, la distance $\varrho(p, Y^{(j)})$ ne peut que croître avec $j \rightarrow \infty$. Il existe par conséquent un j' tel que

$\varrho(p, \sum_{j=1}^{\infty} Y^{(j)}) = \varrho(p, Y^{(j')})$. Si cette distance est positive, elle est sans influence sur l'ordre de p (d'après la définition de cette notion) et elle ne peut être nulle que si $p \in \bar{Y}^{(j')}$. Comme $p \in \Delta - Y \subset \Delta - Y^{(j')}$ et $Y^{(j')}$ est ouvert, on a $p \in \text{Fr}(Y^{(j')})$, d'où $p = s^{(j')}$. Soit $s^{(j')} = s_{m_1 m_2 \dots m_{j'}}$; ce point est donc situé sur l'un des deux segments de $V_{m_1 m_2 \dots m_{j'-1}} \subset \Delta - Y^{(j')}$, à savoir sur celui qui reste dans $\Delta - Y$, car tous les autres $Y^{(j)} \subset Y$ où $j \neq j'$ en sont disjoints. Il en résulte l'ordre 2 de p dans $\Delta - Y$.

C'est la première étape de la construction. La seconde consiste à réduire l'ensemble $\bar{\Gamma}$ des bouts de $\Delta - Y$ à l'ensemble Γ par une transformation convenable de la dendrite $\Delta - Y$ en dendrite définitive Ψ .

Tout intervalle contigu à \mathcal{C} détermine d'une manière univoque celui des termes $C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ de la base de \mathcal{C} dont il est le tiers moyen. Si un point $g \in \bar{\Gamma} - \Gamma \subset B_g$ est le bout — donc le bout gauche — de cet intervalle, on a $g \in C_{m_1 m_2 \dots m_i, 0} \subset C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ et comme $g \in \bar{\Gamma}$, ni $Y_{m_1 m_2 \dots m_i, 0}$ ni $Y_{m_1 m_2 \dots m_i, 1}$ n'est un $Y^{(j)}$ incorporé dans Y , d'où $V_{m_1 m_2 \dots m_i, 0} \subset \Delta - Y$.

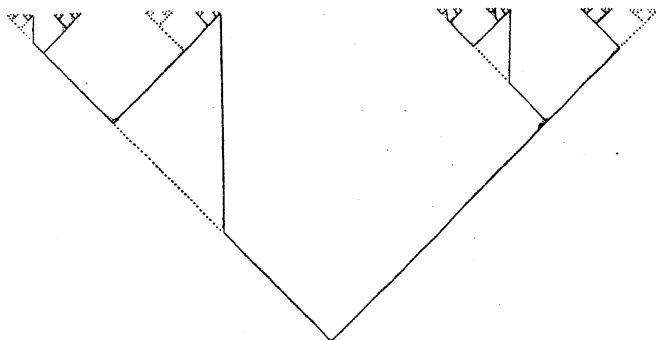
Soit $R(g)$ l'intervalle de la droite $x=g$ qui unit le point g au point r de l'intersection de cette droite avec $V_{m_1 m_2 \dots m_i}$; le point r se trouve situé par définition sur le segment gauche de $V_{m_1 m_2 \dots m_i}$, d'ailleurs juste au milieu entre ses bouts $s_{m_1 m_2 \dots m_i}$ et $s_{m_1 m_2 \dots m_i, 0}$. Désignons par $S(g)$ l'intervalle rectiligne compris entre r et ce dernier sommet, et prolongé au besoin à travers lui — dans le cas où $Y_{m_1 m_2 \dots m_i, 0} \subset Y$ — jusqu'au premier sommet $s_{m_1 m_2 \dots m_i, 0, 1 \dots 1}$ tel que $Y_{m_1 m_2 \dots m_i, 0, 1 \dots 1} - Y \neq 0$.

La transformation en question revient à remplacer les intervalles $S(g) \subset \Delta - Y$ par les intervalles correspondants $R(g)$ pour tous les $g \in \bar{\Gamma} - \Gamma$. Posons donc

$$\Psi = \left[(\Delta - Y) - \sum_{g \in \bar{\Gamma} - \Gamma} S(g) \right] \div \sum_{g \in \bar{\Gamma} - \Gamma} R(g).$$

Ainsi défini, Ψ est un ensemble compact. En effet, son premier sommande (en crochets) est compact, l'ensemble soustrait étant ouvert, et ni les bouts, ni les points d'accumulation des $R(g)$, qui forment son second sommande, n'ont été enlevés; les derniers points sont d'ailleurs les mêmes que les points d'accumulation des $S(g)$ soustraits. Puis, Ψ est un ensemble connexe, la connexité par arcs de la dendrite $\Delta - Y$ n'ayant pas été abolie par la transformation effectuée. En effet, les seuls chemins coupés, à savoir ceux entre les sommets $s_{m_1 m_2 \dots m_i, 0}$ (ou — s'il y a lieu — $s_{m_1 m_2 \dots m_i, 0, 1 \dots 1}$) et les points v correspondants, se trouvent rétablis par les lignes brisées composées de deux segments: l'un qui unissait ce sommet à g dans $\Delta - Y$ et l'autre, $\bar{R}(g)$, qui unit g à r dans Ψ . Le diamètre de ces lignes brisées tendant vers 0 avec celui des $S(g)$ qu'elles remplacent, la connexité locale de $\Delta - Y$ est également maintenue dans Ψ . L'absence des courbes fermées dans Ψ se démontre, comme pour Δ , par le défaut de doubles liaisons entre les $\Delta_{m_1 m_2 \dots m_i}$ distincts. Comme ensemble compact, connexe, localement connexe et dépourvu de courbes fermées, Ψ est donc une dendrite (voir la figure, où un exemple de Ψ est représenté en trait continu et le reste de Δ en pointillé).

Reste à montrer que Γ est l'ensemble des bouts de Ψ . Il est évident que tous les bouts $g \in \bar{\Gamma} - \Gamma$ de $\Delta - Y$, de même que tous les points de ramification $s_{m_1 m_2 \dots m_i, 0}$ (ou — s'il y a lieu — $s_{m_1 m_2 \dots m_i, 0, 1 \dots 1}$) correspondants sont devenus d'ordre 2 dans Ψ : chacun des premiers à la suite du prolongement par le nouvel intervalle de l'ancien qu'il terminait dans $\Delta - Y$ et chacun des seconds par la suppression de l'un des trois intervalles qui s'y rencontraient. Il est aussi évident que l'ordre des autres points d'ordonnée négative n'a pas changé, la transformation de $\Delta - Y$ en Ψ s'effectuant à la distance positive de chacun d'eux.



Enfin, tous les points de Γ sont d'ordre 1 dans \mathcal{P} . En effet, considérons, pour un point quelconque $x \in \Gamma$, l'ensemble $Y_{m_1 m_2 \dots m_i}$ contenant x et ayant le diamètre aussi petit que l'on veut. Le sommet $s_{m_1 m_2 \dots m_i}$, qui est la frontière de cet ensemble dans Δ — comme on l'a vu — dans $\Delta - Y$, est d'ordonnée inférieure à celles de tous les $R(g)$ ajoutés à lui; ce sommet est donc disjoint d'eux. Leur diamètre n'augmentant pas, par leur définition, celui de $Y_{m_1 m_2 \dots m_i}$, leur somme avec cet ensemble, soit Σ , est encore de diamètre aussi petit que l'on veut et sa frontière dans \mathcal{P} se réduit encore au même sommet (puisque tous les autres $R(g)$ ajoutés à $\Delta - Y$ sont, dans leur ensemble, à la distance positive de Σ , l'ensemble $C_{m_1 m_2 \dots m_i}$ étant fermé-ouvert dans \mathcal{C}). Le point x est donc contenu dans un $\Sigma \cdot \mathcal{P}$ de diamètre arbitrairement petit et de frontière composée d'un point. L'ordre 1 de tout point $x \in \Gamma$ est ainsi établi.

Wrocław, le 14 mars 1953.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
 Instytut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences

Travaux cités

- [1] C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948.
- [2] H. Minkowski, *Zur Geometrie der Zahlen*, Verhandlungen des Heidelberger Kongresses, Leipzig 1905.
- [3] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1935.
- [4] B. Knaster et M. Reichbach, *Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe*, *Fundamenta Mathematicae* **40** (1953), p. 13-28.
- [5] W. H. Young, *The Theory of Sets of Points*, Cambridge 1906.
- [6] S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*, *Fundamenta Mathematicae* **1** (1920), p. 17-27.
- [7] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935.

Correction to "On Real-Valued Functions in Topological Spaces"

(Fund. Math. **38** (1951), p. 85—91)

By

M. Katětov (Praha)

There are simple counterexamples showing that the lemma in [1], p. 86 is false. I am indebted to C. H. Dowker for calling my attention to this fact, as well as for pointing out that the extension to normal spaces of Hahn's insertion theorem (cf. Theorem 1 of [1]) was announced by Hing Tong in 1948 (Bulletin Amer. Math. Soc. **54**, p. 65).

To state the correct propositions, some additional definitions are necessary.

If ϱ is a binary relation in R , then $\bar{\varrho}$ is defined as follows: $x\bar{\varrho}y$ if and only if $y\varrho v$ implies $x\varrho v$, and $u\varrho x$ implies $u\varrho y$ for any $u \in R$, $v \in R$. Clearly, $\bar{\varrho}$ is always transitive.

If MCR , NCR , then $M\varrho N$ means that $x\varrho y$ for any $x \in M$, $y \in N$.

We shall say that ϱ possesses *property (I)* if the following assertion holds: if MCR , NCR are countable, and there exist $a \in R$, $b \in R$ such that $M\bar{\varrho}a$, $a\varrho N$, $M\varrho b$, $b\bar{\varrho}N$, then there exists $c \in R$ such that $M\varrho c$, $c\varrho N$.

We shall say that ϱ possesses *property (L)* if, for any finite ACR , there exist elements $a \in R$, $b \in R$ such that $1^\circ A\bar{\varrho}a$, and $a\varrho x$ whenever $A\varrho x$; $2^\circ b\bar{\varrho}A$, and $x\varrho b$ whenever $x\varrho A$.

Lemma 1. *Let p be a set and let R denote the set of all subsets of p . Let ϱ be a binary relation in R such that $1^\circ \varrho$ has the Interpolation Property; $2^\circ xCy \subset p$ implies $x\bar{\varrho}y$; $3^\circ x\varrho y$ implies xCy . Then ϱ possesses properties (I) and (L).*

Lemma 2. *Let a binary relation ϱ in R possess properties (I) and (L). Let T be countable and let τ be a transitive irreflexive relation in T . If $g \in R^T$, $h \in R^T$, $h\varrho'g$, $h\bar{\varrho}'h$, $g\bar{\varrho}'g$, then there exists $f \in R^T$ such that $h\varrho'f$, $f\bar{\varrho}'f$, $f\bar{\varrho}'g$.*

The relations denoted by ϱ in the proofs of Theorems 1 and 3 in [1] satisfy, evidently, conditions (1)-(3) of Lemma 1 and possess, therefore, properties (I) and (L). Since, clearly, we have $G\bar{\varrho}'G$, $H\bar{\varrho}'H$, for the transformations G , H occurring in the proofs, we may apply Lemma 2 instead of the incorrect lemma of [1], p. 86 without making any other changes in the proofs in question.