Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies

Par

B. Knaster et M. Reichbach (Wrocław)

1. Un ensemble E est dit *homogène* (au sens topologique) lorsque pour tout couple a, b de ses points il se laisse transformer en lui-même par homéomorphie (c'est-à-dire par fonction biunivoque et bicontinue) de façon que a passe en b. Il s'agit donc d'une homéomorphie h telle que $h(E)=E$ et $h(a)=b$ [1].

La notion d'homogénéité se laisse graduer de diverses manières. On a étudié les ensembles *bihomogènes*, à savoir en soumettant l'homéomorphie h aux conditions $h(a)=b$ et $h(b)=a$ simultanément. On peut exiger aussi l'existence d'une homéomorphie h qui transforme un couple de points de E en un autre, les deux couples étant arbitrairement donnés d'avance (*homogénéité au degré* 2), ou bien un triple en un triple et ainsi de suite, enfin un sous-ensemble dénombrable fermé de E en un autre, bien entendu homéomorphe à lui et également arbitraire (*homogénéité au degré* $\aleph_0$). On peut aussi combiner les deux gradations. Ainsi la droite, par exemple, est homogène au degré 2, la circonférence l'est au degré 3 et le plan — à tout degré fini; tous les trois ensembles sont bihomogènes au degré 1.

Quel est le degré d'homogénéité du discontinu de Cantor $\mathcal{C}$, qui est — comme on sait — un ensemble homogène contenant des images homéomorphes de tous les espaces séparables de dimension 0? Ce degré dépasse-t-il ceux définis plus haut? Plus précisément, deux sous-ensembles fermés P et Q de $\mathcal{C}$, homéomorphes et non-denses dans $\mathcal{C}$ étant arbitrairement donnés, est-ce que toute homéomorphie $h(P)=Q$ se laisse prolonger à une homéomorphie $h^*(\mathcal{C})=\mathcal{C}$?

Le problème posé ainsi par l'un de nous (Knaster) a été résolu affirmativement par C. Ryll-Nardzewski (voir le corollaire 2). Sa démonstration [2], conçue en termes de l'algèbre de Boole, n'est pas encore publiée. Une démonstration topologique, trouvée plus récemment par

[1] Voir [1], p. 80. Pour les applications aux groupes topologiques, voir ibidem, p. 82.

[2] présentée à la séance du 30 novembre 1951 de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Wrocław.

l'autre de nous (Reichbach), nous a conduits à des généralisations concernant les prolongements des homéomorphies (voir les théorèmes 1 et 4) et entraînant quelques conséquences nouvelles sur les ensembles dont la partie clairsemée n'est pas vide (voir en particulier le théorème 5 et le corollaire 5). Tels sont les principaux résultats exposés dans la suite.

2. Nous n'aurons à considérer que les espaces métriques séparables et leurs sous-ensembles. Tous les *discontinus* (c'est-à-dire ensembles parfaits de dimension 0) étant homéomorphes, la lettre $\mathcal{C}$, avec ou sans indice, désignera désormais un discontinu quelconque. Enfin, h désignera partout une homéomorphie et h^* — son prolongement.

Un ensemble P sera dit *compact du côté d'une suite d'ensembles* $\{U_i\}$ lorsque P contient, pour tout $i=1,2,\ldots$, un point p_i tel que

$$\varrho(U_i, p_i)=\varrho(U_i, P),$$

ϱ désignant la distance, et que la fermeture de l'ensemble de ces points est un sous-ensemble compact de P. Tout P compact est évidemment compact du côté de toute suite d'ensembles.

Une homéomorphie $h(P)=Q$ étant donnée, nous dirons que deux suites d'ensembles, $\{U_i\}$ et $\{V_j\}$ *concourent* vers les ensembles P et Q, supposés compacts du côté de ces suites respectivement, lorsqu'elles s'en approchent indéfiniment et satisfont aux deux conditions symétriques suivantes:

(I) Il existe pour tout $i=1,2,\ldots$ un indice $j=f(i)$ tel que

(i) $\quad i_1 \neq i_2$ entraîne $f(i_1)\neq f(i_2)$,

(ii) $\quad V_{f(i)}$ est homéomorphe à U_i,

(iii) $\quad \varrho(U_i, p_i) \geqslant \varrho[V_{f(i)}, h(p_i)]$.

(II) Il existe pour tout $j=1,2,\ldots$ un indice $i=g(j)$ tel que

(iv) $\quad j_1 \neq j_2$ entraîne $g(j_1)\neq g(j_2)$,

(v) $\quad U_{g(j)}$ est homéomorphe à V_j,

(vi) $\quad \varrho(V_j, q_j) \geqslant \varrho[U_{g(j)}, h^{-1}(q_j)]$,

les q_j étant définis d'une façon analogue aux p_i.

Théorème 1. *Hypothèses: Soient M et N des espaces métriques séparables,*

(1) $\quad P \subset M, \quad Q=h(P)\subset N,$

(2) $\quad M-P=\sum_{i=1}^{\infty} U_i, \quad N-Q=\sum_{j=1}^{\infty} V_j,$

où les ensembles U_i, de même que les ensembles V_j, sont fermés-ouverts, disjoints deux à deux et de diamètre tendant à 0,

(3) *P et Q sont compacts du côté des suites $\{U_i\}$ et $\{V_j\}$ respectivement et ces suites concourent vers eux.*

Thèse: Il existe une homéomorphie $h^*(M)=N$ qui est un prolongement de h.

Démonstration. Les conditions (I) et (II) étant satisfaites en vertu de (3), la fonction f, qui transforme l'ensemble I des valeurs de i (donc l'ensemble de *tous* les entiers positifs) en un sous-ensemble de l'ensemble $J=I$ des valeurs de j, est biunivoque d'après (i). Il en est de même, d'après (iv), de la fonction g, qui transforme J en un sous-ensemble de I. En vertu d'un théorème de Banach[3]), ces fonctions donnent donc lieu aux décompositions simultanées

$$I=I'+I'', \qquad J=J'+J'', \tag{4}$$

chacune en sommandes disjoints et tels que

$$J'=f(I'), \qquad I''=g(J''). \tag{5}$$

Décomposons conformément à (4) et (5) chacune des suites $\{U_i\}$ et $\{V_j\}$ en deux suites partielles disjointes

$$\{U_i\}=\{U_{i'}\}+\{U_{i''}\}, \qquad \{V_j\}=\{V_{j'}\}+\{V_{j''}\} \tag{6}$$

en convenant que

$$i'\in I', \qquad i''\in g(J''), \qquad j'\in f(I'), \qquad j''\in J''. \tag{7}$$

Soit $\varphi_{i'}$ la fonction qui transforme $U_{i'}$ en $V_{f(i')}$ par homéomorphie et qui existe en vertu de (ii). Les ensembles $U_{i'}$, de même que les ensembles $V_{f(i')}$, étant ouverts et disjoints deux à deux en vertu de (2), la fonction φ définie par la condition

$$\varphi(x)=\varphi_{i'}(x) \qquad \text{pour} \quad x\in U_{i'} \tag{8}$$

est une homéomorphie transformant $U'=\sum\limits_{i'\in I'} U_{i'}$ en $V'=\sum\limits_{j'\in f(I')} V_{j'}$. On a donc

$$\varphi(U')=V'.$$

Soient, pareillement, $\psi_{j''}$ l'homéomorphie de $V_{j''}$ en $U_{g(j'')}$ qui existe en vertu de (v) et ψ celle de $V''=\sum\limits_{j''\in J''} V_{j''}$ en $U''=\sum\limits_{i''\in g(J'')} U_{i''}$, définie par la condition

$$\psi(y)=\psi_{j''}(y) \qquad \text{pour} \quad y\in V_{j''}; \tag{9}$$

on a donc

$$\psi(V'')=U''.$$

La fonction

$$k(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour} \quad x\in U',\\ \psi^{-1}(x) & \text{pour} \quad x\in U''\end{cases} \tag{10}$$

[3]) Voir [2] et [3].

est une homéomorphie de $M-P$ en $N-Q$, puisque

$$M-P=U'+U'', \qquad N-Q=V'+V''$$

d'après les formules (2), (6) et les définitions des couples U',U'' et V',V'', les termes de ces couples étant des ensembles ouverts tels que $U'\cdot U''=0=V'\cdot V''$ en vertu de l'hypothèse (2).

Les ensembles $M-P$ et $N-Q$ étant ouverts en vertu de la même hypothèse, les ensembles P et $Q=h(P)$ sont fermés. Il reste donc à montrer que la fonction

$$h^*(x)=\begin{cases}h(x) & \text{pour} \quad x\in P,\\ k(x) & \text{pour} \quad x\in M-P\end{cases} \tag{11}$$

est bicontinue aux points de $\overline{M-P}\cdot P$.

Soit $\{x_n\}$ une suite de points de $M-P$, convergente vers un point $p\in P$. Donc

$$\varrho(x_n,p)\to 0. \tag{12}$$

Les ensembles U_i étant fermés en vertu de (2), il résulte de (12) que

$$x_n\in U_{i_n} \qquad \text{pour une infinité de valeurs de } i_n. \tag{13}$$

En vertu de l'hypothèse (3), les ensembles U_i s'approchent indéfiniment de P d'après la définition de la concurrence, d'où

$$\varrho(U_{i_n},p_{i_n})\to 0 \tag{14}$$

d'après la définition des points $p_i\in P$, qui existent en vertu de la même hypothèse. En vertu de l'hypothèse (2), on a en même temps $\delta(U_{i_n})\to 0$, δ désignant le diamètre; il s'ensuit en vertu de (13) et (14) que $\varrho(x_n,p_{i_n})\to 0$, ce qui entraîne en vertu de (12) que $\varrho(p_{i_n},p)\to 0$ (loi du triangle). Ainsi la suite $\{p_{i_n}\}$ de points de P converge vers le point p. Par conséquent, h étant une homéomorphie définie dans P d'après (1), la suite $\{h(p_{i_n})\}$ de points de Q converge vers le point $h(p)\in Q$:

$$\varrho[h(p_{i_n}),h(p)]\to 0. \tag{15}$$

Partageons la suite d'ensembles $\{U_{i_n}\}$, conformément à (6), en deux suites partielles disjointes

$$\{U_{i_n}\}=\{U_{i'_n}\}+\{U_{i''_n}\}$$

et considérons d'abord la suite partielle de $\{x_n\}$ formée de points $x'_n\in U_{i'_n}$.

En vertu de (3), nous pouvons appliquer (iii) et en conclure d'après (14) que

$$\varrho[V_{f(i'_n)},h(p_{i'_n})]\to 0. \tag{16}$$

Vu (13), on a conformément à la définition des fonctions $\varphi_{i'}$, et à (8)

$$\varphi(x'_n)=\varphi_{i'_n}(x'_n)\in V_{f(i'_n)}. \tag{17}$$

Comme $\delta(V_{f(i'_n)})\to 0$ en vertu de (2), il vient d'après (16) et (17) $\varrho[\varphi(x'_n), h(p_{i'_n})]\to 0$, d'où en vertu de (15)

(18) $$\varrho[\varphi(x'_n), h(p)]\to 0$$

(loi du triangle). Il est ainsi établi que (12) et (13) entraînent (18); en d'autres termes, p étant un point de P,

(19) $\varrho(x'_n, p)\to 0$ entraîne $\varrho[\varphi(x'_n), h(p)]\to 0$ pour $x'_n\in U_{i'_n}$,

c'est-à-dire que

(20) $\varrho(x'_n, p)\to 0$ entraîne $\varrho[h^*(x'_n), h^*(p)]\to 0$

en vertu des définitions (10) et (11) de k et h^*.

Notons qu'il résulte de (19) par raison de symétrie, en remplaçant (i)-(iii) de (I) par (iv)-(vi) de (II), que q étant un point de Q,

(21) $\varrho(y''_n, q)\to 0$ entraîne $\varrho[\psi(y''_n), h^{-1}(q)]\to 0$ pour $y''_n\in V_{j''_n}$.

Considérons à son tour l'autre suite partielle de $\{x_n\}$, formée de points $x''_n\in U_{i''_n}$. Quel que soit $n=1,2,\ldots$, il existe d'après (5) et (7) un $j''\in J''$ tel que $i''_n=g(j''_n)$. Conformément à la définition de $\psi_{j''}$ et à (9), on a donc

(22) $$x''_n=\psi(y''_n)=\psi_{j''_n}(y''_n)$$

pour un point

(23) $$y''_n\in V_{j''_n}.$$

Soit $q_{j''_n}$ le point de Q le plus proche de $V_{j''_n}$; un tel point existe, Q étant supposé compact du côté de la suite $\{V_j\}$. Pour la même raison, Q contient la fermeture $\overline{F}$ de l'ensemble F des points de la suite $\{q_{j''_n}\}$ et $\overline{F}$ est un ensemble compact. Nous allons montrer que l'ensemble $\overline{F}-F$ se réduit à un seul point, à savoir au point $h(p)$.

Soit, en effet, $q\in\overline{F}-F$. Il existe donc dans F une suite partielle de $\{q_{j''_n}\}$ qui converge vers q. Convenons de la désigner de même par $\{q_{j''_n}\}$ pour ne pas compliquer les notations. On a donc

(24) $$\varrho(q_{j''_n}, q)\to 0.$$

En vertu de (3), les ensembles $V_{j''_n}$ s'approchent indéfiniment de Q d'après la définition de la concurrence. On a donc

(25) $$\varrho(V_{j''_n}, q_{j''_n})\to 0.$$

En vertu de (2), on a en même temps $\delta(V_{j''_n})\to 0$. Il s'ensuit d'après (23) et (25) que $\varrho(y''_n, q_{j''_n})\to 0$, ce qui entraîne en vertu de (24) que

(26) $$\varrho(y''_n, q)\to 0$$

(loi du triangle) pour la suite partielle de $\{y''_n\}$ qui vient correspondre à la suite partielle considérée de $\{q_{j''_n}\}$. On conclut de (23) et (26) en vertu

de (21) que $\varrho[\psi(y''_n), h^{-1}(q)]\to 0$, c'est-à-dire que $\varrho[x''_n, h^{-1}(q)]\to 0$ en vertu de (22), d'où $h^{-1}(q)=p$ en vertu de (12), les points x''_n considérés formant par définition une suite partielle de $\{x''_n\}$, donc de $\{x_n\}$.

Il est ainsi démontré que $q\in\overline{F}-F$ entraîne $q=h(p)$, c'est-à-dire que $\overline{F}-F=h(p)$, ce qui revient d'après (26) à la convergence de la suite $\{y''_n\}$ vers le point $h(p)$. Vu (22), nous pouvons donc écrire

$$\varrho(x''_n, p)\to 0 \quad \text{entraîne} \quad \varrho[\psi^{-1}(x''_n), h(p)]\to 0,$$

c'est-à-dire

(27) $\varrho(x''_n, p)\to 0$ entraîne $\varrho[h^*(x''_n), h^*(p)]\to 0$

en vertu des définitions (10) et (11) de k et h^*.

En résumant (20) et (27) pour la suite $\{x_n\}$ tout entière, la continuité de la fonction h^* aux points p de $\overline{M-P}\cdot P$ se trouve ainsi établie. La démonstration de la continuité de la fonction inverse h^{*-1} aux mêmes points (évidemment superflue dans le cas particulier où M est compact) est tout-à-fait symétrique.

Le corollaire suivant montre comment l'hypothèse (3) du théorème 1, qui vient d'être établi, est applicable dans un cas moins général dont nous aurons constamment besoin dans la suite:

Corollaire 1. *Les hypothèses* (1) *et* (2) *étant satisfaites et les suites* $\{U_i\}$ *et* $\{V_j\}$ *s'approchant indéfiniment de* P *et* Q, *l'hypothèse* (3) *est aussi satisfaite toutes les fois que la condition suivante se trouve réalisée avec sa symétrique*:

(28) *Il existe pour tout* $i=1,2,\ldots$ *un point* p_i *et une infinité de valeurs de* j *telles que*

(vii) $$\varrho(U_i, p_i)\geqslant\varrho[V_j, h(p_i)]$$

et pour lesquelles les ensembles V_j *sont homéomorphes à l'ensemble* U_i.

Il s'agit, en effet, de montrer qu'en admettant (1) et (2), la condition (28) entraîne (3). Par raison de symétrie, on peut se borner à définir la fonction $f(i)$ assujettie à (I), ce qui est facile à faire par une simple induction.

Soit $f(1)$ l'indice j le plus petit satisfaisant à (vii) et tel que V_j est homéomorphe à U_1; un tel j existe en vertu de (28) et satisfait évidemment à (ii) et (iii) pour $i=1$. Reste à définir $f(n)$ en admettant les propriétés (i)-(iii) de $f(i)$ pour $i=1,2,\ldots,n-1$. Soit $f(n)$ le plus petit $j>f(i)$, où $i=1,2,\ldots,n-1$, parmi ceux satisfaisant à (vii) et pour lesquels V_j est homéomorphe à U_n; l'existence d'un tel j est encore postulée explicitement dans (28) et il satisfait non seulement à (ii) et (iii), mais évidemment aussi à (i) pour i_1 et i_2 parcourant les valeurs $1,2,\ldots,n$. La fonction $f(i)$ conforme à (I) pour tout $i=1,2,\ldots$ est ainsi définie.

Remarque 1. Nous n'aurons à appliquer le corollaire 1 qu'aux ensembles U_i et V_j homéomorphes entre eux, à savoir fermés-ouverts dans $\mathcal{C}$ ou se réduisant à des points individuels. Il en est toujours ainsi pour M et N compacts (pas nécessairement parfaits) de dimension 0, mais une situation analogue peut se présenter aussi pour $M-P$ et $N-Q$ de dimension positive, formés par exemple d'une infinité de composantes fermées-ouvertes, homéomorphes et de diamètre tendant à 0 (voir la remarque 5).

Théorème 2. $P\subset M=\mathcal{C}_1$ et $Q\subset N=\mathcal{C}_2$ étant des ensembles non-denses tels que $P=\overline{P}\neq 0$ et $h(P)=Q$, il existe un prolongement $h^*(\mathcal{C}_1)=\mathcal{C}_2$ de h.

En effet, l'hypothèse (1) du théorème 1 est alors satisfaite. Il s'agit donc de montrer que les hypothèses (2) et (3) le sont également.

$M-P$ et $N-Q$, comme sous-ensembles ouverts des discontinus, sont des sommes d'ensembles fermés-ouverts disjoints et non-vides U_i et V_j, puisés de leurs bases (au sens de l'axiome V de Kuratowski) respectivement [4]). P et Q étant non-denses et non-vides, ces sommes sont infinies et le diamètre de leurs sommandes tend à 0. On a donc (2). En même temps, ils s'approchent indéfiniment de P et Q, qui sont compacts du côté des suites $\{U_i\}$ et $\{V_j\}$ respectivement, car ils sont des ensembles compacts; il en résulte en particulier l'existence des points p_i et q_j pour toutes les valeurs de ces indices. $Q\neq 0$ étant, comme sous-ensemble fermé et non-dense de $\mathcal{C}_2$, la frontière de l'ensemble ouvert $\mathcal{C}_2-Q=\sum_{j=1}^{\infty}V_j$, il existe pour tout point $q\in Q$, donc en particulier pour le point $q=h(p_i)$, un j satisfaisant à (vii). Enfin, *tous* les ensembles fermés-ouverts non-vides des discontinus étant homéomorphes (comme parfaits de dimension 0), on conclut que la condition (28), qui entraîne (3) en vertu du corollaire 1, se trouve réalisée avec surplus. Il en est de même, et pour les mêmes raisons, de sa symétrique. Reste à appliquer la thèse du théorème 1.

Corollaire 2 (Ryll-Nardzewski). *$P\subset\mathcal{C}_1$ et $Q\subset\mathcal{C}_2$ étant tels que $P=\overline{P}$, $\mathrm{Fr}(P)\neq 0$, $h(P)=Q$ et*

$$h[\mathrm{Fr}(P)]=\mathrm{Fr}(Q), \tag{29}$$

il existe un prolongement $h^*(\mathcal{C}_1)=\mathcal{C}_2$ de h.

Il suffit, en effet, d'établir l'existence d'un prolongement

$$h^*(\overline{\mathcal{C}_1-P})=\overline{\mathcal{C}_2-Q} \tag{30}$$

de l'homéomorphie $h(P)=Q$, la coïncidence de h^* avec elle à la frontière $\mathrm{Fr}(P)$ étant alors assurée par (29).

[4]) Voir [1], p. 131 et 166.

Comme $P=\overline{P}$ et $\mathrm{Fr}(P)\neq 0$, on a $\mathcal{C}_1-P\neq 0$ et $\mathrm{Fr}(P)\subset P$, d'où

$$\mathrm{Fr}(P)\cdot(\mathcal{C}_1-P)=0. \tag{31}$$

L'identité $\mathrm{Fr}(P)=\overline{P}\cdot\overline{\mathcal{C}_1-P}$ (définition de la frontière) entraîne $\mathrm{Fr}(P)\subset\overline{\mathcal{C}_1-P}$. Il en résulte que $\mathrm{Fr}(P)$ est non-dense dans $\overline{\mathcal{C}_1-P}$, puisque déjà l'ensemble non-vide $\mathcal{C}_1-P$, qui est contenu d'après (31) dans le complémentaire de $\mathrm{Fr}(P)$, est trivialement dense dans $\overline{\mathcal{C}_1-P}$. Comme fermeture d'un sous-ensemble ouvert non-vide du discontinu $\mathcal{C}_1$, l'ensemble $\overline{\mathcal{C}_1-P}$ est un discontinu. Enfin, une frontière est toujours ensemble fermé par définition. Toutes ces propriétés se transportant par l'homéomorphie $h(P)=Q$, il reste à poser

$$M^*=\overline{\mathcal{C}_1-P}=\mathcal{C}_1^*,\qquad N^*=\overline{\mathcal{C}_2-Q}=\mathcal{C}_2^*,\qquad P^*=\mathrm{Fr}(P),\qquad Q^*=\mathrm{Fr}(Q)$$

et à appliquer le théorème 2 aux ensembles munis d'astérisque, pour que l'existence du prolongement (30) soit établie.

Remarque 2. Il est manifeste que le théorème 2 et le corollaire 2 expriment, en deux variantes, l'homogénéité topologique particulièrement prononcée du discontinu. Les problèmes suivants restent ouverts: les ensembles métriques parfaits de dimension 0 sont-ils les seuls espaces métriques séparables compacts doués de ce degré d'homogénéité? Existe-t-il une homogénéité topologique encore plus haute, c'est-à-dire qui implique celle-là sans être impliquée par elle? Et si oui, est-ce que le discontinu la possède?

3. Le théorème qui suit permet, dans certaines conditions fort générales, d'appliquer le théorème 2 aux ensembles qui contiennent des discontinus sans qu'ils les soient eux-mêmes.

Théorème 3. Soient $M=\mathcal{C}_1+P$, $N=\mathcal{C}_2+Q$, $P\cdot\mathcal{C}_1=\overline{P}\cdot\mathcal{C}_1$, $\mathrm{Fr}(P)\neq 0$, $h(P)=Q$ et (29). Alors il existe un prolongement $h^*(M)=N$ de h.

Il suffit, en effet, d'établir l'existence d'un prolongement

$$h^*(\overline{M-P})=\overline{N-Q} \tag{32}$$

de l'homéomorphie $h(P)=Q$, la coïncidence de h^* avec elle à la frontière $\mathrm{Fr}(P)$ étant alors assurée par (29). Or, $M-P=(\mathcal{C}_1+P)-P=\mathcal{C}_1-P$, d'où $\overline{M-P}\cdot P=\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot P$. En outre, cet ensemble étant (comme le montre son symbole) contenu dans $\mathcal{C}_1$, il vient (en tenant compte de l'hypothèse que $P\cdot C_1=\overline{P}\cdot C_1$)

$$\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot P=\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot P\cdot\mathcal{C}_1=\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot\overline{P}\cdot\mathcal{C}_1=\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot\overline{P}=\overline{M-P}\cdot\overline{P}=\mathrm{Fr}(P)$$

et on a les égalités tout-à-fait analogues pour N, Q et $\mathcal{C}_2$. L'égalité (32) prend donc la forme (30), de sorte que la démonstration se réduit à poser

$$M^*=\mathcal{C}_1,\qquad N^*=\mathcal{C}_2,\qquad P^*=P\cdot\mathcal{C}_1,\qquad Q^*=Q\cdot\mathcal{C}_2$$

et à appliquer le corollaire 2 aux ensembles munis d'astérisque en entendant par $\mathrm{Fr}(P^*)$ et $\mathrm{Fr}(Q^*)$, dans l'hypothèse (29) du corollaire 2 ainsi appliqué, les ensembles $\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot P=\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot P\cdot\mathcal{C}_1=\overline{\mathcal{C}_1-P}\cdot\mathcal{C}_1\cdot\overline{P}\cdot\mathcal{C}_1$ (car $P\cdot\mathcal{C}_1=\overline{P}\cdot\mathcal{C}_1=\overline{P\cdot\mathcal{C}_1}$) et $\overline{\mathcal{C}_2-Q}\cdot Q$, c'est-à-dire bien les frontières des ensembles P^* et Q^* relatives à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.

Corollaire 3. *Soient $M=\mathcal{C}_1+B_1$ et $N=\mathcal{C}_2+B_2$ les décompositions de Cantor-Bendixson des ensembles M et N en parties disjointes parfaite et clairsemée respectivement. Si*

$$h(\overline{B}_1)=\overline{B}_2 \tag{33}$$

est une homéomorphie telle que $h(\overline{B}_1\cdot\overline{\mathcal{C}_1-B_1})=\overline{B}_2\cdot\overline{\mathcal{C}_2-B_2}\neq 0$, il existe un prolongement $h^*(M)=N$ de h.

Si, en particulier, les espaces M et N sont compacts et les ensembles B_1 et B_2 sont isolés, on peut remplacer l'hypothèse (33) *par*

$$h(\overline{B}_1\cdot\mathcal{C}_1)=\overline{B}_2\cdot\mathcal{C}_2.$$

En effet, la première partie de ce corollaire est un cas particulier du théorème 3 pour $P=\overline{B}_1$ et $Q=\overline{B}_2$. Pour en établir la seconde partie, on n'a qu'à représenter d'abord l'ensemble $M-\overline{B}_1$ dans la forme

$$M-\overline{B}_1=U_1+(x_1)+U_2+(x_2)+\dots$$

où $\{U_i\}$ est la suite des ensembles fermés-ouverts formant $\mathcal{C}_1-\overline{B}_1$ et $\{x_i\}$ est celle des points de B_1 (les deux suites s'approchant indéfiniment de $\overline{B}_1\cdot\mathcal{C}_1$ à cause de la compacité de M), puis à représenter d'une façon analogue l'ensemble $N-\overline{B}_2$ et enfin à appliquer le corollaire 1, la condition (28) étant manifestement réalisée.

Remarque 3. L'hypothèse (29) du corollaire 2 est évidemment une condition non seulement *suffisante*, mais aussi *nécessaire* pour l'existence du prolongement h^*, puisque la frontière d'un ensemble est un invariant de cette homéomorphie. Il en est de même, pour les raisons analogues, de l'hypothèse (33) du corollaire 3.

L'hypothèse $\mathrm{Fr}(P)\neq 0$ du corollaire 2 et du théorème 3 et essentielle. En effet, $\mathrm{Fr}(P)=0$ entraînerait $\mathrm{Fr}(Q)=0$ en vertu de (29), de sorte que P et $\mathcal{C}_1-P$, de même que Q et $\mathcal{C}_2-Q$ seraient fermés-ouverts dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement. Comme sous-ensembles des discontinus, ils le seraient donc eux-mêmes. Trois cas peuvent se présenter:

1° $\mathcal{C}_1-P=0=\mathcal{C}_2-Q$. Alors on aurait $P=\mathcal{C}_1$ et $Q=\mathcal{C}_2$, donc $h^*\equiv h$ et le corollaire 2 serait trivial.

2° $\mathcal{C}_1-P\neq 0\neq\mathcal{C}_2-Q$. Alors toute homéomorphie entre les discontinus $\mathcal{C}_1-P$ et $\mathcal{C}_2-Q$ serait de la forme (30) et sa coïncidence avec l'homéomorphie $h(P)=Q$ sur $\mathrm{Fr}(P)=0$ serait triviale.

3° $\mathcal{C}_1-P=0\neq\mathcal{C}_2-Q$. Alors le corollaire 2 — de même que le théorème 3 — seraient faux, comme le montre l'exemple dans lequel $P=\mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2=\mathcal{C}$ (le discontinu de Cantor) et Q est la partie de $\mathcal{C}$ située sur le segment $0\leqslant x\leqslant 1/3$. Il est évident qu'aucune homéomorphie $h(P)=Q$, voire aucune fonction biunivoque, ne se laisse prolonger dans ce cas sur $\mathcal{C}$ tout entier.

4. A présent, nous allons déduire du théorème 1 un théorème sur le prolongement des homéomorphies qui sont données entre les dérivés d'ensembles compacts.

E' désignant le dérivé de E (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $x=\lim\limits_{i\to\infty}x_i$ où $x_i\in E$, $x_i\neq x_j$ pour $i\neq j$ et $i,j=1,2,\dots$), soit, plus généralement, E^α le *α-ème dérivé* de E (c'est-à-dire l'ensemble défini par les conditions $E^0=E$, $E^\alpha=(E^{\alpha-1})'$ lorsque $\alpha-1$ existe et $E^\alpha=\prod\limits_{\xi<\alpha}E^\xi$ lorsque α est un nombre limite transfini). Dans cette notation, on a donc en particulier $E^1=E'$.

Si E est séparable, il existe notoirement un $\beta<\Omega$ (le plus petit) et tel que tous les dérivés suivants de E sont vides ou identiques à E^β, à savoir suivant que l'ensemble E^β est vide ou parfait. Si E est compact, on a

$$E=\sum_{0\leqslant\xi\leqslant\beta}E^\xi \tag{34}$$

et les termes de cette série constituent une suite descendante d'ensembles compacts.

Appelons *α-ème isolat* de E et désignons par E_α l'ensemble $E^\alpha-E^{\alpha+1}$; il est donc isolé par définition et par conséquent dénombrable. En particulier, E étant compact, on conclut de (34) que

$$E=\sum_{0\leqslant\xi<\alpha}E_\xi+E^\alpha \quad\text{pour tout } \alpha\leqslant\beta, \tag{35}$$

où

$$\sum_{0\leqslant\xi<\alpha}E_\xi\cdot E^\alpha=0, \tag{36}$$

les termes du premier facteur étant d'ailleurs également disjoints deux à deux.

D'après un théorème de Mazurkiewicz et Sierpiński [5]), tous les ensembles compacts dénombrables dont le β-ème dérivé se compose de s points, sont homéomorphes (à savoir, à l'ensemble bien ordonné de type $\omega^\beta\cdot s+1$). Le couple ordonné β,s les caractérise donc topologiquement; nous en dirons brièvement qu'ils sont de *type* β,s. L'indice α du dérivé, de même que celui de l'isolat auquel appartient un point est un invariant d'homéomorphie. Notons que

[5]) Voir [4], p. 21.

(37) *Si E est compact et $p \in E^\alpha \subset \overline{E_\xi}$ pour un $\xi < \alpha \leqslant \beta$, tout ensemble R ouvert (dans E) et contenant le point p contient, pour tout entier positif s, un sous-ensemble S fermé-ouvert (dans E) de type ξ, s.*

En effet, comme $p \in \overline{E_\xi}$, il existe dans R une suite infinie $\{p_k\}$ de points de l'ensemble isolé E_ξ. Soit donc $R_k \subset R - E^\alpha$ un ensemble ouvert (dans E) contenant p_k sans contenir aucun autre point de E_ξ. L'ensemble $E - E^\alpha$ étant dénombrable en vertu de (35) et (36), donc de dimension 0, R_k peut être choisi fermé-ouvert (dans E) et il est de type $\xi, 1$, puisque $p_k \in E_\xi \subset E^\xi$. Reste à poser $S = R_1 + R_2 + \ldots + R_s$.

Evidemment, les hypothèses que $E^\alpha \subset \overline{E_\xi}$ *à partir d'un* $\xi < \alpha$ ou *pour tout* $\xi < \alpha$ sont équivalentes.

Théorème 4. *Soient M et N des ensembles compacts tels que $h(M^\alpha) = N^\alpha$ pour un α et que $M^\alpha \subset \overline{M_\xi}$, de même que $N^\alpha \subset \overline{N_\xi}$, pour tout $\xi < \alpha$. Alors il existe un prolongement $h^*(M) = N$ de h.*

Posons, en effet, $P = M^\alpha$ et $Q = N^\alpha$. L'hypothèse (1) du théorème 1 est donc satisfaite et, vu (36), on a

$$M - P = \sum_{0 \leqslant \xi < \alpha} M_\xi \quad \text{et} \quad N - Q = \sum_{0 \leqslant \xi < \alpha} N_\xi .$$

La marche de la construction des suites $\{U_i\}$ et $\{V_j\}$ satisfaisant aux hypothèses (2) et (3) du théorème 1 sera la suivante:

Après avoir fait correspondre aux n_1 premiers ensembles U_i les ensembles $V_1, \ldots, V_{n_1}$, nous ferons correspondre à ces derniers et à certains ensembles $V_{n_1+1}, \ldots, V_{n_1+n_2}$ des nouveaux ensembles $U_{n_1+1}, \ldots, U_{2n_1+n_2}$, puis à ces derniers et à certains ensembles $U_{2n_1+n_2+1}, \ldots, U_{2n_1+n_2+n_3}$ des nouveaux ensembles $V_{n_1+n_2+1}, \ldots, V_{2n_1+2n_2+n_3}$ et ainsi de suite. De cette façon, les conditions (i) et (iv) se trouveront réalisées et il en sera de même des conditions (ii) et (v), les correspondances en question étant des homéomorphies. Les ensembles P et Q étant compacts par définition, donc compacts du côté des suites quelconques d'ensembles, il s'agira de choisir les ensembles U_i et V_j de manière qu'ils soient fermés-ouverts, de diamètre tendant à 0, disjoints deux à deux et conformes aux conditions (iii) et (vi), réalisables facilement grâce à (37).

Passons à la construction. L'ensemble compact $P = M^\alpha$ peut être couvert d'un nombre fini d'ensembles ouverts $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}$ de diamètre inférieur à 1, ne couvrant pas M tout entier et dont les frontières sont disjointes de l'ensemble $M - P$, qui est dénombrable, donc de dimension 0. L'ensemble $M - \sum_{i=1}^{k_1} A_i \subset M - P$ est donc non-vide, fermé-ouvert (dans M) et dénombrable. Il existe par conséquent une décomposition finie

$$M - \sum_{i=1}^{k_1} A_i = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n_1}$$

en ensembles fermés-ouverts (dans M), disjoints et de diamètre inférieur à 1.

Soit ξ_i, s_i le type de U_i pour $i = 1, 2, \ldots, n_1$. On a $\xi_i < \alpha$, puisque, par définition, $U_i \subset M - P = \sum_{0 \leqslant \xi < \alpha} M_\xi$, d'où en particulier $N^\alpha \subset \overline{N_{\xi_i}}$ en vertu de l'hypothèse.

Désignons par p_i le point de M^α le plus proche de U_i et considérons le point $h(p_i) = q_i$ de N^α. Par suite de l'invariance du type, il existe en vertu de (37) à la distance de q_i inférieure à $\varrho(U_i, p_i)$ un ensemble V_i de diamètre inférieur à 1, fermé-ouvert (dans N) et de type ξ_i, s_i, donc homéomorphe à U_i. En posant $f(i) = i$, les conditions (i)-(iii) de (I) sont donc satisfaites par les ensembles $V_{f(i)}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n_1$ et on peut évidemment admettre que les ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_{n_1}$ sont disjoints deux à deux, puisqu'ils sont fermés-ouverts et peuvent être choisis d'après (37) dans des entourages arbitrairement petits de q_i.

Pour continuer l'induction, posons $\nu_r = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ et admettons que nous avons fait correspondre aux ensembles fermés-ouverts disjoints $U_1, U_2, \ldots, U_{u_r + \nu_r}$, ordonnés d'après le diamètre non-croissant, les ensembles fermés-ouverts disjoints $V_1, V_2, \ldots, V_{v_r + \nu_r}$, ordonnés de même et tels que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, u_r + \nu_r$, il y a parmi eux un $V_{f(i)}$ homéomorphe à U_i, en même temps que, pour tout $j = 1, 2, \ldots, v_r$, il y a parmi les U_i un $U_{g(j)}$ homéomorphe à V_j. Admettons en particulier que $f(u_r + i) = v_r + i$ pour $i = 1, 2, \ldots, \nu_r$ (c'est-à-dire que c'est V_{v_r+i} qui est homéomorphe à U_{u_r+i}) et que $\delta(U_{u_r+\nu_r}) < 1/r > \delta(V_{v_r+\nu_r})$.

L'ensemble compact N^α peut être couvert d'une somme finie d'ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_{k_r}$, ouverts (dans N), de diamètre inférieur à $1/(r+1)$, ne couvrant pas $N - \sum_{j=1}^{v_r+\nu_r} V_j$ tout entier et dont les frontières sont disjointes de l'ensemble dénombrable $N - Q$. Il existe donc une décomposition finie de son sous-ensemble fermé-ouvert non-vide

$$N - \sum_{j=1}^{v_r+\nu_r} V_j - \sum_{j=1}^{k_r} B_j = V_{v_r+\nu_r+1} + V_{v_r+\nu_r+2} + \ldots + V_{v_r+\nu_{r+1}} \tag{38}$$

en n_{r+1} ensembles fermés-ouverts (dans N), disjoints et de diamètre également inférieur à $1/(r+1)$. Les termes de la suite $V_1, V_2, \ldots, V_{v_r+\nu_{r+1}}$ sont donc fermés-ouverts et disjoints deux à deux.

Soit ξ_j, t_j le type de V_j pour $j = v_r + 1, v_r + 2, \ldots, v_r + \nu_{r+1}$. On a $\xi_j < \alpha$, puisque $V_j \subset N - Q = \sum_{0 \leqslant \xi < \alpha} N_\xi$, d'où en particulier $M^\alpha \subset \overline{M_{\xi_j}}$ en vertu de l'hypothèse.

Désignons par q_j le point de N^α le plus proche de V_j et considérons le point $p_j = h^{-1}(q_j)$ de M^α. Par suite de l'invariance du type, il existe en vertu de (37) à la distance de p_j inférieure à $\varrho(V_j, q_j)$ un ensemble $U_{u_r+\nu_r+j}$ de diamètre inférieur à $1/(r+1)$, fermé-ouvert (dans M) et de type ξ_j, t_j, donc homéomorphe à V_j. En posant $g(j)=u_r+v_r+j$, les conditions (iv)-(vi) de (II) se trouvent donc satisfaites par les ensembles $U_i=U_{g(j)}$ pour

$$i=u_r+v_r+1,\ u_r+v_r+2,\ \ldots,\ u_{r+1}+v_{r+1}\quad (\text{où } u_{r+1}=u_r+v_r)$$

et l'on peut évidemment admettre que les ensembles U_i sont, pour ces valeurs de i, disjoints deux à deux, en même temps que des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_{u_r+v_r}$ définis antérieurement, car ils sont fermés-ouverts et peuvent être choisis d'après (37) dans un entourage arbitrairement petit de p_j.

La construction de n_{r+2} nouveaux ensembles U_i par recouvrement convenable de M^α est tout à fait symétrique à celle de n_{r+1} ensembles V_j, qui précède. Il en est de même du mode de faire correspondre aux

$$U_i\quad\text{pour}\quad i=u_r+v_r+1,\ u_r+v_r+2,\ \ldots,\ u_r+v_r+v_{r+1}+n_{r+2}$$

(c'est-à-dire pour i parcourant de $u_{r+1}+1$ à $u_{r+1}+v_{r+2}$), supposés ordonnés suivant le diamètre non-croissant, les v_{r+2} nouveaux ensembles

$$V_j\quad\text{pour}\quad j=v_r+v_{r+1}+1,\ v_r+v_{r+1}+2,\ \ldots,\ v_{r+2}+v_{r+2}\quad (\text{où } v_{r+2}=v_{r+1}+v_{r+1}).$$

Les suites $\{U_i\}$ et $\{V_j\}$ se trouvent donc définies par induction conformément à toutes les conditions requises, y compris la condition (2), car on a $N-Q=\sum_{j=1}^{\infty} V_j$ en vertu de (38), les ensembles B_j qui couvraient $Q=N^\alpha$ ayant été choisis de diamètre tendant à 0, de sorte que $Q=\prod_{r=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_r} B_j$. La raison de l'égalité $M-P=\sum_{i=1}^{\infty} U_i$ est symétrique. Reste donc à appliquer la thèse du théorème 1.

Corollaire 4. *Si les dérivés M^β et N^β (dernières non-vides ou premières parfaites) d'ensembles compacts M et N sont homéomorphes et $M^\beta \subset \overline{M_\xi}$, de même que $N^\beta \subset \overline{N_\xi}$, pour tout $\xi<\beta$, il existe un prolongement de cette homéomorphie sur M et N tout entiers.*

L'hypothèse de l'homéomorphie entre M^β et N^β est, bien entendu, superflue lorsque ces dérivés sont des ensembles parfaits de dimension 0.

Remarque 4. Le corollaire 4 est évidemment une généralisation du théorème précité de Mazurkiewicz et Sierpiński, car si les derniers dérivés non-vides M^β et N^β (avec le même indice β) d'ensembles compacts dénombrables M et N se composent d'un même nombre s de points, ils sont homéomorphes (en tant que finis); en même temps, la condition $E^\alpha \subset \overline{E_\xi}$ pour tout $\xi<\alpha$ est notoirement satisfaite pour tout E compact dénombrable et pour tout $\alpha>0$.

L'identité des indices α aux dérivés de M et N dans le théorème 4, de même que celle des indices β dans le corollaire 4, est essentielle. L'invariance du type α, en effet, pour conséquence que le prolongement de l'homéomorphie est *toujours* impossible dans le cas contraire.

5. En particulier, si l'on pose $\alpha=1$ dans le théorème 4, on a le

Théorème 5. *Si A et B sont des ensembles isolés, $M=\overline{A}$ et $N=\overline{B}$ sont des espaces compacts et $h(A')=B'$, il existe un prolongement $h^*(M)=N$ de h.*

Corollaire 5. *Tous les ensembles de la forme $\overline{H}=H+\mathcal{C}$ où H est un ensemble isolé sont homéomorphes.*

C'est un cas particulier du théorème 5 en posant $M=N=\overline{H}$ et $A=H$, l'homéomorphie $h(\mathcal{C})=\mathcal{C}$ étant arbitraire.

Ainsi H_1 étant, par exemple, l'ensemble des milieux des intervalles bornés contigus à $\mathcal{C}$ et H_2 — un ensemble quelconque ayant dans ces intervalles (mais pas nécessairement dans chacun d'eux) un nombre fini (même variable) ou une infinité de points (même s'approchant indéfiniment de l'un ou des deux bouts de l'intervalle dans lequel ils sont situés), $\mathcal{C}+H_1$ et $\mathcal{C}+H_2$ sont homéomorphes, pourvu que $\overline{H}_2=\mathcal{C}+H_2$.

En vertu du théorème 4, il en est encore de même, si l'on remplace chaque point de H par un ensemble du type β, s quelconque, mais fixe.

Remarque 4. La dimension 0 de A' n'étant pas postulée dans le théorème 5, ce théoreme est vrai pour les M et N de dimension positive quelconque. Il est facile de voir qu'il subsiste encore lorsque les composantes de A et de B, fermées-ouvertes par hypothèse, ne se réduisent pas à des points isolés, mais sont des continus homéomorphes deux à deux de diamètre tendant à 0, A' et B' désignant dans ce cas leurs limites supérieures (topologiques) respectives. Le rôle des ensembles A et B isolés est joué alors par les espaces, nécessairement dénombrables, de leurs composantes (métrisé par l'écart de Hausdorff par exemple). Ces espaces sont isolés, car les composantes en question viennent d'être supposées fermées-ouvertes.

Travaux cités

[1] C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, 3-me édition, Warszawa-Wrocław 1952.

[2] S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fundamenta Mathematicae **6** (1924), p. 236-239.

[3] B. Knaster, *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique **6** (1927), p. 133.

[4] S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*, Fundamenta Mathematicae **1** (1920), p. 17-27.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences