Un lemme sur les F_σ

Par

B. Knaster et M. Reichbach (Wrocław)

Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique compact. Tout ensemble fermé $F \subset \mathfrak{X}$ de dimension $n \geqslant 0$ se laisse représenter, d'après un théorème de Menger [1]), comme somme finie d'ensembles fermés de diamètre aussi petit que l'on veut et tels que les parties communes de r quelconques d'entre eux, où $r = 1, 2, \ldots, n+2$, sont de dimension $n-r+1$ au plus [2]). Nous ferons plusieurs fois l'usage de ce théorème sans le citer désormais expressément.

Il y a des questions [3]) dans lesquelles la propriété suivante des ensembles F_σ s'impose comme un lemme assez naturel, sinon indispensable pour la solution, et que nous n'avons pas trouvé dans les traités:

Lemme. *Tout ensemble $\Phi \subset \mathfrak{X}$ de dimension $n \geqslant 0$ qui est un F_σ se laisse représenter comme somme d'une suite (infinie) d'ensembles compacts $\{F_\nu\}$ de diamètre aussi petit que l'on veut et tendant à 0 avec $\nu \to \infty$, toute partie commune de r quelconques d'entre eux, où $r = 1, 2, \ldots, n+2$, étant de dimension $n-r+1$ au plus.*

En voici la démonstration:

Soit (D_∞) la propriété en question. D'abord, étant donné un $\varepsilon > 0$, l'ensemble Φ est somme d'une suite d'ensembles compacts de diamètre inférieur à ε et tendant à 0. Il suffit, en effet, de représenter le i-ème sommande compact de Φ comme somme finie d'ensembles compacts de diamètre inférieur à ε/i par exemple et de transformer en une suite simple la suite double ainsi formée. On peut donc admettre que

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i, \tag{1}$$

$$\delta(\Phi_i) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$\lim_{i \to \infty} \delta(\Phi_i) = 0, \tag{3}$$

1) Voir [1], p. 156.

2) Voir [2], p. 181, condition D_n.

3) Voir par exemple [3], p. 18 (cas $n = 0$).

où Φ_i sont des ensembles compacts. Posons $\Delta_i = \Phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j$. On a alors en vertu de (1), (2) et (3)

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i, \tag{4}$$

$$\delta(\Delta_i) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$\lim_{i \to \infty} \delta(\Delta_i) = 0, \tag{6}$$

$$\Delta_i \cdot \Delta_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j. \tag{7}$$

Il reste donc à décomposer convenablement chacun des ensembles Δ_i, qui sont, par définition, des différences d'ensembles compacts. Nous allons nous servir à cet effet du théorème suivant, dû à C. Kuratowski:

(T) *Étant donnée, dans un espace compact E de dimension n, une suite (finie ou infinie) d'ensembles fermés $\{Q_j\}$ tels que*

(8) $\dim (Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \cdot \ldots \cdot Q_{j_s}) \leqslant n-s$ *pour tout système de* $s = 1, 2, \ldots, n+1$ *indices distincts,*

il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une décomposition finie de E en ensembles fermés

$$E = F_1 + F_2 + \ldots + F_l \tag{9}$$

tels que $\delta(F_k) < \varepsilon$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, l$ et

(10) $\dim (Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \cdot \ldots \cdot Q_{j_s} \cdot F_{k_{s+1}} \cdot F_{k_{s+2}} \cdot \ldots \cdot F_{k_r}) \leqslant n-r+1$ *pour tout système de $r = 1, 2, \ldots, n+2$ indices distincts dont $s = 0, 1, \ldots, r$.*

En effet, $\{P_j\}$ étant une suite quelconque d'ensembles fermés, il existe [4]) une décomposition (9) de E en ensembles fermés tels que

$$\dim (P_j \cdot F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \ldots \cdot F_{k_t}) \leqslant \dim (P_j) - t + 1 \text{ pour } t = 1, 2, \ldots, \dim(P_j) + 2. \tag{11}$$

Rangeons en une suite l'espace E, tous les Q_j où $j = 1, 2, \ldots$ et les produits d'au plus $n+1$ ensembles $Q_1, Q_2, \ldots$, et désignons par P_j le j-ème terme de cette suite. Quel que soit $j = 2, 3, \ldots$, on a donc par définition $P_j = Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \cdot \ldots \cdot Q_{j_s}$ pour un système de $s = 1, 2, \ldots, n+1$ indices distincts et $\dim (P_j) \leqslant n-s$ en vertu de (8). Il en résulte en vertu de (11) que

$$\dim (Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \cdot \ldots \cdot Q_{j_s} \cdot F_{k_{s+1}} \cdot F_{k_{s+2}} \cdot \ldots \cdot F_{k_r}) \leqslant (n-s) - (r-s) + 1 = n-r+1,$$

c'est-à-dire la thèse (10), qu'il s'agissait de déduire.

4) Voir [4], p. 58, théorème III, 1. Pour le cas particulier où la suite $\{P_j\}$ est finie (le seul que nous aurons à appliquer dans la suite), voir aussi [1], p. 170.

Le théorème (T) permet d'établir la propriété (d) suivante des différences d'ensembles compacts:

(d) *Étant donné dans* $\mathfrak{X}$ *un ensemble quelconque* $\Delta = A - B$ *où* A *et* B *sont des ensembles compacts,* $A \cdot B \neq 0$ *et* $\dim(A) \leqslant n$, *il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *une décomposition de* Δ *en ensembles compacts,* $\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$, *tels que*

$$\delta(F_k) < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \dots, \tag{12}$$

$$\lim_{k \to \infty} \delta(F_k) = 0, \tag{13}$$

(14) $\dim(F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \ldots \cdot F_{k_r}) \leqslant n - r + 1$ *pour tout système de* $r = 1, 2, \dots, n+2$ *indices distincts.*

Pour le montrer, nous allons procéder par induction. Décomposons l'ensemble $A_1 = A$ en une somme finie d'ensembles compacts

$$A_1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_{l_1} \tag{15}$$

tels que la partie commune de r quelconques d'entre eux, où $r = 1, 2, \dots, n+2$, soit de dimension $n - r + 1$ au plus et que le diamètre de chacun d'eux soit inférieur à

$$\varepsilon_1 = \min\,[\varepsilon/2, \max_{p \in A_1} \varrho(p, B)], \tag{16}$$

ϱ désignant la distance. Par conséquent la somme

$$D_1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_{m_1} \tag{17}$$

de ceux qui sont disjoint de B est un ensemble compact non-vide. Il en est de même de la somme de ceux qui restent; désignons-la par A_2. Il est facile de voir que les ensembles $F_1, F_2, \dots, F_{m_1}, A_2$ satisfont à (14). On n'a, en effet, à envisager que le cas où $F_{k_r} = A_2$. Cet ensemble étant par définition une somme finie d'ensembles compacts dont chacun a avec l'ensemble $F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \ldots \cdot F_{k_{r-1}}$, où les indices sont des entiers positifs distincts et au plus égaux à m_1, une partie commune de dimension $n - r + 1$ au plus, l'ensemble $F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \ldots \cdot F_{k_{r-1}} \cdot A_2$, comme somme finie de ces parties communes, est encore de dimension $n - r + 1$ au plus. La propriété (14) de la décomposition

$$A_1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_{m_1} + A_2 \tag{18}$$

est ainsi établie. Il en résulte que les ensembles

$$Q_j = F_j \cdot A_2 \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \dots, m_1 \tag{19}$$

sont tout au plus de dimension $n - 1$ et qu'ils satisfont à (8), car

$$Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \cdot \ldots \cdot Q_{j_s} = (F_{j_1} \cdot A_2) \cdot (F_{j_2} \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot (F_{j_s} \cdot A_2) = F_{j_1} \cdot F_{j_2} \cdot \ldots \cdot F_{j_s} \cdot A_2,$$

d'où $\dim(Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \cdot \ldots \cdot Q_{j_s}) \leqslant n - (s+1) + 1 = n - s$. En même temps, tous les Q_j où $j = 1, 2, \dots, m_1$ sont, en vertu de (19), contenus dans l'ensemble compact A_2.

Il existe donc, en vertu du théorème (T), en y posant $E = A_2$, une décomposition finie de cet ensemble en sommandes compacts

$$A_2 = F_{m_1+1} + F_{m_1+2} + \ldots + F_{l_2} \tag{20}$$

assujettis à (10) pour les indices $k_{s+1}, k_{s+2}, \dots, k_r$ prenant des valeurs $m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, l_2$, le diamètre de chaque sommande étant inférieur à

$$\varepsilon_2 = \min\,[\varepsilon_1/2, \varrho(D_1, B)/2, \max_{p \in A_2} \varrho(p, B)]. \tag{21}$$

Par conséquent, la somme

$$D_2 = F_{m_1+1} + F_{m_1+2} + \ldots + F_{m_2} \tag{22}$$

de ceux qui sont disjoints de B est un ensemble compact non-vide, de même que la somme A_3 de ceux qui restent.

Or, la propriété (10) de la décomposition (20) a pour effet que la décomposition

$$D_1 + D_2 = F_1 + F_2 + \ldots + F_{m_1} + F_{m_1+1} + \ldots + F_{m_2} \tag{23}$$

satisfait à (14). On n'a, en effet, à envisager que le cas où s premiers facteurs de l'ensemble $F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \ldots \cdot F_{k_r}$ sont des sommandes de D_1 et les autres — de D_2. Mais alors, quel que soit $i = 1, 2, \dots, s$, on a

$$F_{j_i} \cdot F_{k_{s+1}} \cdot F_{k_{s+2}} \cdot \ldots \cdot F_{k_r} \subset F_{j_i} \cdot D_2 \subset F_{j_i} \cdot A_2 = Q_{j_i}$$

d'après (22), (20) et (19). Il en résulte que

$$F_{j_1} \cdot F_{j_2} \cdot \ldots \cdot F_{j_s} \cdot F_{k_{s+1}} \cdot F_{k_{s+2}} \cdot \ldots \cdot F_{k_r} \subset Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \cdot \ldots \cdot Q_{j_s} \cdot F_{k_{s+1}} \cdot F_{k_{s+2}} \cdot \ldots \cdot F_{k_r}$$

et, la dimension de cet ensemble ne dépassant pas $n - r + 1$ d'après (10), la propriété (14) de la décomposition (23) se trouve établie.

Notons que

$$A_3 \cdot D_1 = 0, \tag{24}$$

la distance entre les points de A_3 et l'ensemble B étant par définition inférieure à ε_2, donc à celle entre D_1 et B en vertu de (21).

Admettons à présent que les ensembles compacts A_k, D_k et les nombres ε_k aient été définis pour un k de manière que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$A_k = D_k + A_{k+1}, \tag{25}$$

$$D_k \cdot B = 0 \quad \text{et} \quad A_{k+1} \cdot B \supset A \cdot B \neq 0, \tag{26}$$

$$A_{k+1} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} D_j = 0, \tag{27}$$

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_k = F_1 + F_2 + \ldots + F_{m_1} + \ldots + F_{m_2} + \ldots + F_{m_k}, \tag{28}$$

(29) [5] $$\varepsilon_k = \min\,[\varepsilon_{k-1}/2,\ \varrho(D_{k-1},B)/2,\ \max_{p\in A_k}\varrho(p,B)],$$

(30) $$\delta(F_j) < \varepsilon_k \quad \text{pour} \quad j = m_{k-1}+1,\ m_{k-1}+2,\dots,m_k,$$

(31) les sommandes du membre droit de la décomposition (28) ont la propriété (14).

Posons

(32) $$Q_j = F_j\cdot A_{k+1} \quad \text{où} \quad j=1,2,\dots,m_k$$

et $A_{k+1}=F_{m_k+1}+F_{m_k+2}+\dots+F_{l_{k+1}}$ où les F_i pour $i=m_k+1,\ m_k+2,\dots,l_{k+1}$ sont des ensembles compacts, assujettis à (14) et de diamètre inférieur à

(33) $$\varepsilon_{k+1} = \min\,[\varepsilon_k/2,\ \varrho(D_k,B)/2,\ \max_{p\in A_{k+1}}\varrho(p,B)].$$

Alors la somme

(34) $$D_{k+1} = F_{m_k+1}+F_{m_k+2}+\dots+F_{m_{k+1}}$$

de ceux qui sont disjoints de B est un ensemble compact non-vide, de même que la somme A_{k+2} de ceux qui restent. Les conditions (25) et (26), en y remplaçant k par $k+1$, se trouvent donc satisfaites. Il en est de même de la condition (27), car d'une part la condition (25), établie pour $k+1$, entraîne $A_{k+2}\subset A_{k+1}$, d'où $A_{k+2}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}D_j=0$ d'après (27), et d'autre part on a $A_{k+2}\cdot D_k=0$, puisque la distance entre les points de A_{k+2} et B est par définition inférieure à ε_{k+1}, donc à celle entre D_k et B en vertu de (33). La condition (28) pour $k+1$ résulte de la même condition pour k en vertu de (34) et la condition (29) pour $k+1$ résulte directement de (33), qui entraîne aussi la condition (30) pour $k+1$. Enfin, la démonstration de la condition (31) pour $k+1$, c'est-à-dire de la propriété (14) pour (28) avec $k+1$ au lieu de k, ne diffère de celle pour (23) que par l'emploi de (32) au lieu de (19) dans le raisonnement.

Les conditions (25)-(31) étant satisfaites pour $k=1$ et 2 en vertu de (15)-(18) et (20)-(24), les suites $\{A_k\}$, $\{D_k\}$ et $\{\varepsilon_k\}$ assujetties à ces conditions pour tout $k=1,2,\dots$ se trouvent ainsi définies.

Or, on a

(35) $$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} D_k.$$

En effet, $\Delta\cdot B\subset\prod_{k=1}^{\infty}A_k$ en vertu de (26) et

(36) $$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$$

[5]) Lorsqu'on n'exige pas que tous les sommandes F_k de Δ soient d'emblée non-vides, les formules (16), (21) et (29) peuvent être simplifiées en les remplaçant par l'égalité $\varepsilon_k=\varepsilon/2^k$ pour $k=1,2,\dots$ Toutes les autres formules restent alors vraies et les F_k vides peuvent être éliminés collectivement à la fin de la démonstration (remarque de C. Kuratowski).

en vertu de (29). Par conséquent $\Delta\cdot B=\prod_{k=1}^{\infty}A_k$, puisque la distance entre les points de A_k et B est par définition inférieure à ε_k et B est compact. On a donc

(37) $$\Delta = \Delta - B = \Delta - \prod_{k=1}^{\infty}A_k = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k - A_{k+1}),$$

car $\Delta=A_1$ par définition et la suite $\{A_k\}$ est descendante en vertu de (25). Il s'ensuit en outre de (25) que $A_k-A_{k+1}\subset D_k$, d'où

(38) $$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k-A_{k+1})\subset\sum_{k=1}^{\infty}D_k,$$

et que $D_k\subset A_k$, d'où $D_k\subset\Delta$, donc $\sum_{k=1}^{\infty}D_k\subset\Delta$ et par suite $\sum_{k=1}^{\infty}D_k\subset\Delta-B$ en vertu de (26). L'égalité (35) en résulte en vertu de (38) et (37).

Les formules (35) et (28) établissent la décomposition de Δ en ensembles compacts $F_1,F_2,\dots,F_j,\dots$ (sommandes des D_k dans leur ordre naturel) qui satisfait à (12) en vertu de (16) et (29), à (13) en vertu de (30) et (36), enfin à (14) en vertu de (31). La propriété (d_∞) de Δ est ainsi démontrée.

La démonstration de la propriété (D_∞) de Φ s'achève à présent comme il suit. Vu (4), considérons pour tout Δ_i où $i=1,2,\dots$ une décomposition

(39) $$\Delta_i = F_{i1}+F_{i2}+\dots+F_{ik}+\dots$$

conforme à (d_∞), en prenant pour ε dans (16) un nombre inférieur à $\delta(\Delta_i)$ (lorsque $\delta(\Delta_i)>0$). Alors, un $\eta>0$ arbitraire étant donné, il n'y a en vertu de (6) qu'un nombre fini des Δ_i qui contiennent des sommandes F_{ik} de diamètre dépassant η et, en vertu de (13), le nombre de tels sommandes dans chacun de ces Δ_i est également fini. En rangeant donc la suite double $\{F_{ik}\}$ en une suite simple $\{F_\nu\}$, l'inégalité $\delta(F_\nu)>\eta$ ne peut se présenter que pour un nombre fini des valeurs de ν. La suite $\{\delta(F_\nu)\}$ converge donc vers 0 avec $\nu\to\infty$. Quant à la dimension des parties communes de r sommandes F_ν, elle est déterminée par (31) lorsqu'ils font partie d'un même Δ_i et elle est nulle en vertu de (7) toutes les fois que deux d'entre eux font partie des Δ_i différents. Elle satisfait donc dans les deux cas à la dernière thèse du lemme, c. q. f. d.

Ajoutons quatre remarques:

1. Le lemme subsiste évidemment lorsque Φ est en particulier un ensemble compact; aussi est-il aisé d'y adapter la démonstration. Soit, en effet, F_0 un sous-ensemble quelconque d'un tel Φ, de diamètre inférieur à ε et compact (composé d'un point par exemple). Alors $\Phi-F_0$

est un F_σ dont la décomposition $\Phi - F_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ engendrée par la propriété (D_∞) fournit immédiatement celle de Φ, à savoir $\Phi = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu$, qui a trivialement la même propriété.

2. La propriété (d_∞), établie pour les différences d'ensembles compacts, est plus faible que (D_∞), car dans la thèse (14) de (d_∞) le nombre n désigne la dimension de A au lieu de celle de Δ, qui peut être inférieure. Toutefois la propriété (D_∞) de Δ — c'est-à-dire avec $n = \dim(\Delta)$ dans (14) — résulte du lemme *a posteriori*, toute différence d'ensembles compacts étant un F_σ.

3. On a le corollaire:

$G_1, G_2, \ldots, G_j$ étant des ensembles ouverts dans un ensemble compact $A \subset \mathcal{X}$, disjoints deux à deux et ayant les dimensions

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \dim(A) = n \tag{40}$$

respectivement, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une décomposition de A en une suite infinie d'ensembles compacts, $A = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$, assujettis aux conditions (12)-(14) *et aux deux suivantes:*

(41) *tout F_k est contenu soit dans un G_i où $i = 1, 2, \ldots, j$, soit dans l'ensemble compact $B = A - \sum_{i=1}^{j} G_i$,*

(42) $\dim(F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \ldots \cdot F_{k_r}) \leqslant n_i - r + 1$ *pour tout système de $r = 1, 2, \ldots, n_i + 2$ indices distincts appartenant aux sommandes de G_i.*

On n'a, en effet, que d'appliquer le lemme à chacun des G_i, où $i = 1, 2, \ldots, j$, séparément, tout sous-ensemble ouvert d'un ensemble compact étant un F_σ.

La décomposition de l'ensemble compact B peut être, à volonté, finie ou infinie (suivant la remarque 1); la condition (14) ne se laisse pas améliorer pour lui, car on a nécessairement $\dim(B) = \dim(A - \sum_{i=1}^{j} G_i) = n$ en vertu de (40).

La condition (42) reste évidemment valable à plus forte raison lorsque i est le plus petit indice pour lequel G_i contient un facteur de l'ensemble $F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \ldots \cdot F_{k_r}$, puisque cet ensemble est vide en vertu de (41) toutes les fois que deux de ses facteurs sont des sommandes de deux G_i différents, donc disjoints par hypothèse; il en est de même lorsque l'un des facteurs est un sommande de B.

4. La formule (24) et sa généralisation (27) ne sont pas indispensables pour la démonstration du lemme, mais ont été établies en vue de l'application qui suit.

Si l'on renonce à la deuxième thèse du lemme, c'est-à-dire à $\lim_{\nu \to \infty} \delta(F_\nu) = 0$, tout en conservant la première (la présence des $\delta(F_\nu)$ aussi petits que l'on veut, donc des suites partielles $\{F_{\nu_j}\}$ telles que $\lim_{j \to \infty} \delta(F_{\nu_j}) = 0$), on peut remplacer la troisième thèse, à savoir qui concerne la dimension des parties communes, par la suivante, qui est manifestement plus forte:

toutes les parties communes de $r = 2$ sommandes étant de dimension $n-1$ au plus et celles de $r \geqslant 3$ sommandes étant vides.

Il suffit, en effet, de remplacer (39) par la décomposition $\Delta_i = D_{i1} + D_{i2} + \ldots + D_{ik} + \ldots$ — c'est-à-dire conforme à (35) — et de ranger la suite double $\{D_{ik}\}$ en une suite simple $\{D_\nu\}$. Alors la décomposition $\Phi = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu$ satisfait à la première thèse du lemme en vertu de (5). En même temps,

$$D_{ik} \cdot D_{i\,k+1} \subset D_{ik} \cdot A_{i\,k+1}$$

$$= (F_{i\,m_{k-1}+1} + F_{i\,m_{k-1}+2} + \ldots + F_{i\,m_k}) \cdot A_{i\,k+1} = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} Q_{ij}$$

en vertu de (34) avec k au lieu de $k+1$ et de (32). Il en résulte tout comme pour les Q_j figurant dans (19) que $\dim(D_{ik} \cdot D_{i\,k+1}) \leqslant n-1$. Par contre, $D_{ij} \cdot D_{i\,k+1} \subset D_{ij} \cdot A_{i\,k+1} = 0$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, k-1$ en vertu de (27) et $D_{ik'} \cdot D_{jk''} \subset \Delta_i \cdot \Delta_j = 0$ pour $i \neq j$ en vertu de (7). La variante du lemme est ainsi établie.

Elle subsiste, évidemment, aussi pour des Φ compacts (voir la remarque 1).

Travaux cités

[1] K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1927.

[2] C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948.

[3] B. Knaster et M. Reichbach, *Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe*, Fundamenta Mathematicae **40** (1953), p. 13-28.

[4] C. Kuratowski, *Topologie II*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1950.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences