The proof is based upon the following lemma:

Let $\boldsymbol{F}$ be a compact class which approximates $\boldsymbol{M}$ with respect to μ. Then, for every $E \epsilon \boldsymbol{M}$ with $\mu(E)>0$ there exist sets $P_0, P_1 \epsilon \boldsymbol{F}$ and $E_0, E_1 \epsilon \boldsymbol{M}$ such that

$$E_0 \subset P_0 \subset E, \qquad E_1 \subset P_1 \subset E, \qquad P_0 P_1 = 0,$$
$$\mu(E_0)>0, \qquad \mu(E_1)>0, \qquad \mu(E_0+E_1)<\tfrac{7}{8}\mu(E).$$

This lemma permits us to obtain the required set N by the known dyadic construction. The compactness of $\boldsymbol{F}$ guarantees that the power of the obtained set is really that of the continuum.

(ii) *A purely atomic σ-measure μ is compact.*

Let $X=A_1+A_2+\dots$ be the decomposition of X into disjoint atoms. It is easy to see that the sets of the form $A_{k_1}+A_{k_2}+\dots+A_{k_n}-Z$, where $\mu(Z)=0$, constitute a compact class $\boldsymbol{F}$ which approximates $\boldsymbol{M}$ with respect to μ.

4. Minimal σ-extensions. The minimal σ-extension of a compact measure is also compact (C 4 (ii)). We shall prove that

(i) *There is a non-atomic and non compact measure the minimal σ-extension of which is purely atomic and consequently compact.*

Let $X=(r_1, r_2, \dots)$ be the set of all rational numbers of the interval $(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, and let $\boldsymbol{M}$ denote the field spanned on the class of all intervals of the set X with irrational extremities. For every $E \epsilon \boldsymbol{M}$ put

$$\mu(E)=\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\dots \tag{11}$$

where $r_{n_1}, r_{n_2}, \dots$ is the sequence of all $r_n \epsilon E$.

It follows from 3(i) that μ is non compact. On the other hand, μ has the σ-extension to $\boldsymbol{M}_\beta$, namely the measure defined by the formula (11) for every $E \subset X$. Obviously this σ-extension is purely atomic (with the atoms $(r_1), (r_2), \dots$) and, by 3(ii), compact.

References

[1] E. Sparre-Andersen and B. Jessen, *On the introduction of measures in infinite product spaces*, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. **25** (1948), no. 4.

[2] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[3] E. Marczewski, *On compact measures*, Fundamenta Mathematicae **40** (1953), p. 113-124.

[4] E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, *Projections in abstract sets*, Fundamenta Mathematicae **40** (1953), p. 160-164.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences

Sur une propriété des ensembles analytiques linèaires (solution d'un problème de E. Marczewski)

Par

W. Sierpiński (Warszawa)

Soit F la famille de tous les ensembles plans qui sont de la forme $H_1H_2\dots$, où H_n $(n=1,2,\dots)$ est une somme d'un nombre fini de rectangles aux côtés parallèles aux axes des coordonnées. Le but de cette note est de démontrer un théorème qui représente la solution d'un problème que m'a posé E. Marczewski. Le voici:

Théorème. *Tout ensemble analytique linéaire borné est la projection orthogonale d'un ensemble plan de la famille F.*

Démonstration. Soit E un ensemble analytique linéaire borné; il est donc situé à l'intérieur d'un intervalle fini (a,b). Comme on le sait, il existe une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$. Soit I l'image géométrique de la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $(x,f(x))$ du plan, où x est un nombre irrationnel de l'intervalle $(0,1)$. Soient $\bar{I}$ la fermeture de l'ensemble I, et n un nombre naturel. Faisons correspondre à chaque point p de $\bar{I}$ l'intérieur d'un carré dont p en est le centre et dont le côté est égal à $1/n$. D'après le théorème de Borel, il existe un nombre fini de tels carrés dont la somme P_n recouvre l'ensemble (fermé et borné) $\bar{I}$. Comme on peut le démontrer sans peine, on a $\bar{I}=P_1P_2\dots$

Soit $r_1, r_2, \dots$ une suite infinie formée de tous les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $(0,1)$. Soient Q_n l'intérieur du rectangle aux côtés situés sur les droites $x=0$, $x=r_n$, $y=a$, $y=b$, et R_n l'intérieur du rectangle formé par les droites $x=r_n$, $x=1$, $y=a$, $y=b$.

La fonction $f(x)$ étant continue dans l'ensemble N, on démontre sans peine que

$$I=\prod_{n=1}^{\infty} P_n(Q_n+R_n);$$

l'ensemble I est donc un ensemble de la famille F. L'ensemble E étant la projection orthogonale de I sur l'axe d'ordonnées, le théorème se trouve démontré.

Le théorème inverse est vrai aussi, vu que la projection d'un ensemble G_δ est un ensemble analytique. Donc, *pour qu'un ensemble linéaire borné soit analytique, il faut et il suffit qu'il soit la projection d'un ensemble plan de la famille F.*