where $0 \leqslant x \leqslant 1$. For each $x = (r, \varphi, z) \in A_2$ let

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\varphi + \pi g\left(\frac{\varphi}{\pi}, z\right)\right),\ \varphi + \pi g\left(\frac{\varphi}{\pi}, z\right),\ z + h\left(\frac{\varphi}{\pi}, z\right)\right) & \text{for } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ \left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(\varphi - \pi + 2\pi z),\ \varphi - \pi + 2\pi z,\ z + \frac{z}{2}\right) & \text{for } \pi \leqslant \varphi < \infty,\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(\varphi - \pi + 2\pi z),\ \varphi - \pi + 2\pi z,\ \frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right) & \text{for } \pi \leqslant \varphi < \infty,\ \frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$$

Finally for each $x = (1, \varphi, z) \in A_3$ let

$$f(x) = \begin{cases} \left(1, \varphi - \pi + 2\pi z, z + \frac{z}{2}\right) & \text{for } 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2} \\ \left(1, \varphi - \pi + 2\pi z, \frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right) & \text{for } \frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$$

It is easy to see that $f(x)$ is a continuous mapping of $A = A_1 + A_2 + A_3$ into itself and that $f(x)$ has no fixed point. Thus we have constructed a contractible continuum A and a continuous mapping $f \in A^A$ which has no fixed point.

Thus our problem is solved in the negative in virtue of Proposition (*).

Department of Mathematics, Osaka University

Sur la dérivée algébrique

Par

J. G.-Mikusiński (Wrocław)

1. Soit A un anneau commutatif. Supposons qu'une opération fasse correspondre un élément $a' \in A$ à tout élément $a \in A$ de manière que

$$(\alpha) \text{ et } (\beta) \qquad (a+b)' = a' + b' \qquad \text{et} \qquad (ab)' = a'b + ab'.$$

Cette opération sera dite *dérivation*.

Dans cet article, nous étudierons quelques propriétés d'une telle dérivation et en moutrerons quelques interprétations.

La dérivation dans un corps a été étudié par A. Weil[1]); son objet de recherches diffère d'ailleurs du nôtre.

2. On a

$$0' = 0, \qquad (-a)' = -a', \qquad (a-b)' = a' - b'.$$

En effet, il vient de (α), $0' = 0' + 0'$, d'où $0' = 0$; $a' + (-a)' = [a + (-a)]' = 0' = 0$, d'où $(-a)' = -a'$; $(a-b)' = [a + (-b)]' = a' + (-b)' = a' - b'$.

Il est aussi facile de démontrer par induction que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} a_i', \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1} a_i' a_{i+1} \dots a_n.$$

3. Posons par recurrence

$$a^{(n)} = (a^{(n-1)})' \qquad (n = 1, 2, \dots;\ a^{(0)} = a).$$

(I) *Si l'un au moins des éléments a, b n'est pas un diviseur de zéro, la relation $a'b - ab' = 0$ entraîne $a^{(m)} b^{(n)} - a^{(n)} b^{(m)} = 0$.*

En effet, supposons que a ne soit pas un diviseur de zéro. Si $a'b - ab' = 0$ et $a^{(p)} b - a b^{(p)} = 0$, on a

$$a(a^{(p)} b' - a' b^{(p)}) = a'(a^{(p)} b - a b^{(p)}) - a^{(p)}(a'b - ab') = 0,$$

d'où

$$a^{(p)} b' - a' b^{(p)} = 0.$$

[1]) A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1946, p. 11-14. Voir aussi N. Bourbaki, *Algèbre*, (Actualités Sc. Ind. 1102, Paris 1950), Chap. IV, § 4, p. 37-52.

D'autre part, en dérivant l'égalité $a^{(p)}b - ab^{(p)} = 0$, il vient $a^{(p-1)}b - ab^{(p+1)} - a^{(p)}b' + a'b^{(p)} = 0$, d'où $a^{(p+1)}b - ab^{(p+1)} = 0$. On a par induction

$$a^{(m)}b - ab^{(m)} = 0 \quad \text{et} \quad a^{(n)}b - ab^{(n)} = 0.$$

Ceci entraîne

$$a(a^{(m)}b^{(n)} - a^{(n)}b^{(m)}) = a^{(n)}(a^{(m)}b - ab^{(m)}) - a^{(m)}(a^{(n)}b - ab^{(n)}) = 0,$$

d'où la proposition.

4. Nous dirons qu'un élément c de A est *constant* lorsque $c' = 0$. On voit, d'après (α) et (β) que l'ensemble C des constants est un sous-anneau de A.

Si $c \in C$, on a $(ca)' = ca'$. Si $a' = b'$, on a $a = b + c$, où $c \in C$.

Les éléments $a_1, \dots, a_n$ de A seront dits *linéairement dépendants* s'il existe des constants $c_1, \dots, c_n$, non tous nuls, tels que $c_1a_1 + \dots + c_na_n = 0$.

On sait qu'il est possible de caractériser, dans certains cas occurents dans l'analyse classique, la linéaire dépendence des fonctions au moyen du déterminant de Wroński. Dans notre cas, on peut établir, pour la dérivation algébrique, un théorème analogue.

Supposons que l'anneau A n'ait pas de diviseurs de zéro et que la dérivation vérifie, en plus de (α) et (β), la condition

(γ) *Si $a'b - ab' = 0$, a et b sont linéairement dépendants.*

Cela posé, on a le théorème suivant:

(II) *Pour que les éléments $a_1, \dots, a_n$ soient linéairement dépendants, il faut et il suffit que*

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_1' & \dots & a_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n-1)} & \dots & a_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Nécessité. Si $c_1a_1 + \dots + c_na_n = 0$, où c_i sont des constants, on a, par dérivation successive, $c_1a_1^{(i)} + \dots + c_na_n^{(i)} = 0$ $(i = 0, \dots, n-1)$, d'où $c_iW = 0$. Si l'un au moins des coefficients c_i n'est pas nul, il s'ensuit que $W = 0$.

Suffisance[2]). D'après (γ), le théorème est vrai pour $n = 2$. Pour avoir une démonstration par induction, supposons que le théorème soit vrai pour $n-1$ éléments. Désignons, par A_i $(i = 1, \dots, n)$, le mineur (muni du signe convenable) de W correspondant à l'élément $a_i^{(n-1)}$.

Si $A_n = 0$, les éléments $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont linéairement dépendants, d'après l'hypothèse que le théorème est vrai pour $n-1$ éléments. Par conséquent, les éléments $a_1, \dots, a_n$ sont encore linéairement dépendants.

[2]) La méthode de démonstration qui suit est analogue à celle de G. Valiron dans son livre *Equations fonctionnelles, Applications*, Paris 1945, p. 169. C'est M. Mostowski qui m'a averti de cette méthode; ma première démonstration était plus difficile.

Si $A_n \neq 0$, remarquons que

$$a_1^{(i)}A_1 + \dots + a_n^{(i)}A_n = 0 \qquad (i = 0, \dots, n-1); \tag{1}$$

cette égalité a évidemment lieu pour $i = n-1$, car son premier membre représente le développement du déterminant W qui est nul par hypothèse; pour $i < n-1$ l'égalité (1) a encore lieu car son premier membre peut être considéré comme le développement d'un déterminant qui a deux lignes identiques.

Dérivons successivement les $n-1$ premières égalités (1) et tenons compte à chaque dérivation de l'égalité suivante; on aura

$$a_1^{(i)}A_1' + \dots + a_n^{(i)}A_n' = 0 \qquad (i = 0, \dots, n-2). \tag{2}$$

Multiplions (1) par A_n' et (2) par A_n, puis faisons la différence des égalités obtenues:

$$a_1^{(i)}(A_1'A_n - A_1A_n') + \dots + a_{n-1}^{(i)}(A_{n-1}'A_n - A_{n-1}A_n') = 0 \qquad (i = 0, \dots, n-2).$$

En tenant compte de $A_n \neq 0$, il s'ensuit que

$$A_i'A_n - A_iA_n' = 0 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

D'après (γ), on a donc

$$\bar{c}_iA_i = \bar{\bar{c}}_iA_n \qquad (i = 1, \dots, n),$$

où les $\bar{c}_i$ sont des constants non nuls (car $A_n \neq 0$) et $\bar{\bar{c}}_n \neq 0$. En multipliant (1) par $\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n$ et en posant

$$c_i = \bar{c}_1 \dots \bar{c}_{i-1}\bar{\bar{c}}_i\bar{c}_{i+1} \dots \bar{c}_n,$$

on a donc $A_n(c_1a_1 + \dots + c_na_n) = 0$, où $c_n \neq 0$. Or, cela achève la démonstration, car $A_n \neq 0$.

5. Soit A, comme au paragraphe précédent, un anneau sans diviseurs de zéro, où une dérivation satisfaisant aux postulats (α), (β) et (γ) est définie.

(III) *L'équation*

$$a_nx^{(n)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{3}$$

a au plus n solutions linéairement indépendantes.

En effet, soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des solutions de (3). Si W est le déterminant de Wroński pour ces solutions, on a, en vertu de (3),

$$a_nW = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_{n+1}^{(n-1)} \\ -\sum_{j=0}^{n-1} a_jx_1^{(j)} & \dots & -\sum_{j=0}^{n-1} a_jx_{n+1}^{(j)} \end{vmatrix} = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_{n+1}^{(n-1)} \\ x_1^{(j)} & \dots & x_{n+1}^{(j)} \end{vmatrix}.$$

Chacun des déterminants dans la dernière somme a deux lignes identiques et, par conséquent, est nul; on a donc $W=0$, ce qui entraîne la linéaire dépendance de $x_1, \ldots, x_{n+1}$ en vertu du théorème (II).

6. A étant un anneau sans diviseurs de zéro, désignons par A^* le corps quotient de A et par C^* le corps quotient de C. On peut étendre la dérivation avec les postulats (α) et (β) aux éléments de A^*, en posant par définition

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b-ab'}{b^2} \qquad (b \neq 0).$$

Il est facile de vérifier qu'une telle dérivation satisfait aux conditions (α) et (β).

(IV) *Pour que C^* coïncide avec l'ensemble des éléments constants de A^*, il faut et il suffit que la dérivation dans A satisfasse à la condition* (γ).

Nécessité. Supposons que $a'b-ab'=0$. Si $a=b=0$, on n'a rien à démontrer. Supposons donc que l'un des deux éléments considérés, b par exemple, soit non nul. Alors $(a/b)'=0$ et a/b est constant. Si ce constant appartient à C^*, on peut écrire $a/b=c_1/c_2$, où $c_1, c_2 \in C$ et $c_2 \neq 0$. Donc $c_2 a - c_1 a = 0$, ce qui prouve la nécessité de notre condition.

Suffisance. Si a/b est constant, on a $(a/b)'=0$, d'où $a'b-ab'=0$. En supposant que le postulat (γ) soit satisfait, on a $c_1 a + c_2 b = 0$, où $c_1, c_2 \in C$ et $c_1 \neq 0$, car $b \neq 0$. Donc $a/b = -c_2/c_1$, ce qui prouve que tout constant appartient à C^*. D'autre part, tout élément de C^* est évidemment constant, car

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)' = \frac{0 \cdot c_2 - c_1 \cdot 0}{c_2^2} = 0.$$

La suffisance de notre condition est donc démontrée.

7. Nous allons montrer encore que la condition (γ) est indépendante, c'est-à-dire qu'elle ne peut être déduite de (α) et (β). En effet, soit A l'anneau des polynômes de deux variables u et v aux coefficients numériques. Posons par définition

$$\Big(\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} u^i v^j\Big)' = \sum_{i,j=0}^{n} (i+j)\, c_{ij} u^i v^j,$$

où les coefficients c_{ij} sont des nombres. Cette dérivation est différente de la dérivation usuelle, mais elle satisfait aux conditions (α) et (β), ce qui est facile à vérifier. L'ensemble des constants coïncide avec celui des nombres. On a en particulier $u'=u$, $v'=v$, et, par conséquent, $u'v-uv'=0$, malgré que u et v soient pas linéairement dépendants. La condition (γ) n'est donc pas satisfaite.

8. La dérivation habituelle des fonctions satisfait évidemment aux axiomes (α) et (β). En entendant l'addition et la multiplication au sens

ordinaire, on peut distinguer différentes interprétations de l'anneau A, par exemple:

1° L'anneau des fonctions indéfiniement dérivables dans un intervalle (α, β). Cet anneau a des diviseurs de zéro. Le théorème (I) est donc applicable, cependant les théorèmes (II), (III) et (IV) ne le sont pas.

2° L'anneau des polynômes (d'une variable) aux coefficients
(a) entiers;
(b) rationnels;
(c) réels;
(d) complexes.

Ces anneaux n'ont pas de diviseurs de zéro. Dans chacun de ces cas, l'ensemble des éléments constants est celui des coefficients (entiers, rationnels, réels ou complexes). De plus, la condition (γ) est satisfaite. On peut donc appliquer les théorèmes (I)-(III); en outre, le théorème (IV) exprime dans ce cas que les constants des corps quotients correspondants sont des nombres (rationnels, réels ou complexes).

3° L'ensemble des fonctions analytiques
(a) holomorphes dans un domaine donné;
(b) méromorphes dans un domaine donné.

Ces anneaux n'ont pas de diviseurs de zéro. L'ensemble des constants est celui des fonctions constantes. La condition (γ) est satisfaite. Les théorèmes (I)-(III) sont applicables. (Le théorème (IV) ne fournit ici rien d'intéressant, car les deux anneaux considérés sont, proprement dit, des corps).

9. Nous examinerons encore des exemples, où la dérivation est définie d'une manière différente qu'habituellement. Considérons d'abord l'anneau (commutatif) F des fonctions (complexes) continues de variable réelle t $(0 \leqslant t < \infty)$, où l'addition et la multiplication sont définies par les égalités [3])

$$f+g = \{f(t)\} + \{g(t)\} = \{f(t)+g(t)\},$$

$$fg = \{f(t)\}\{g(t)\} = \Big\{\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau\Big\}.$$

D'après un théorème de Titchmarsh [4]) cet anneau n'a pas de diviseurs de zéro. Admettons que la dérivation soit définie par les égalités

$$f' = \{f(t)\}' = \{t f(t)\};$$

la *dérivation* signifie donc ici la multiplication des valeurs de la fonction par t.

---

[3]) Nous désignerons ici les fonctions par $f, g, \ldots$, ou $\{f(t)\}, \{g(t)\}, \ldots$, en reservant les symboles $f(t), g(t), \ldots$ pour les valeurs des fonctions au point t.

[4]) E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **25**, 1926, p. 286, Theorem VII.

Cette opération satisfait évidemment aux lois (α) et (β), car

$$tf(t)+tg(t)=t[f(t)+g(t)],$$

$$t\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\int_0^t (t-\tau)\,f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau+\int_0^t f(t-\tau)\,\tau g(\tau)\,d\tau$$

pour $0\leqslant t<\infty$.

Le seul élément constant dans F est la fonction nulle. Cependant le corps quotient Q de F a des éléments constants non nuls. Nous démontrerons, à savoir, la proposition suivante:

L'ensemble des éléments constants dans Q est isomorphe au corps des nombres complexes.

A cet effet, considérons la somme directe S du corps N des nombres complexes et l'anneau F, où la multiplication d'une fonction $f\in F$ par un nombre $a\in N$ est définie par les égalités

$$af=a\{f(t)\}=\{af(t)\}.$$

L'ensemble S est donc un anneau dont les éléments ont la forme $\alpha+\{f(t)\}$, et où l'addition et la multiplication sont définies par les égalités

$$(\alpha+\{f(t)\})+(\beta+\{g(t)\})=(\alpha+\beta)+\{f(t)+g(t)\},$$

$$(\alpha+\{f(t)\})(\beta+\{g(t)\})=\alpha\beta+\Big\{\beta f(t)+\alpha g(t)+\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\Big\}.$$

L'anneau S est commutatif et dépourvu de diviseurs de zéro.

Etendons la définition de dérivation, en posant

$$(x+\{f(t)\})'=\{tf(t)\};$$

alors les conditions (α) et (β) sont évidemment satisfaites. On a, en particulier, $\alpha'=0$; on voit que les éléments $\alpha\in N$ sont des constants uniques de l'anneau S.

Il est facile de voir que le corps quotient de S est isomorphe à celui de F, c'est-à-dire à Q [5]). Pour prouver la proposition, il suffit de montrer, en vertu du théorème (IV), que la dérivation dans S satisfait à la condition (γ). Il revient au même de montrer que si

$$f'g-fg'=0, \tag{4}$$

[5]) L'isomorphisme peut s'exprimer explicitement par la correspondance

$$\frac{\alpha+\{f(t)\}}{\beta+g\{(t)\}}\sim\frac{\{\alpha+\int_0^t f(\tau)d\tau\}}{\{\beta+\int_0^t g(\tau)d\tau\}};$$

pour $\alpha=\beta=0$, cette formule se réduit à

$$\frac{0+\{f(t)\}}{0+\{g(t)\}}\sim\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}.$$

il existe deux nombres α et β, dont l'un au moins est non nul, tels que

$$\alpha f+\beta g=0. \tag{5}$$

En vertu de (I), on a, pour $n=1,2,\ldots$ [6]),

$$gf^{(n)}-fg^{(n)}=0,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^t \tau^n[g(t-\tau)\,f(\tau)-f(t-\tau)\,g(\tau)]\,d\tau=0 \qquad \text{pour}\quad 0\leqslant t<\infty.$$

D'après un théorème bien connu de Lerch [7]), on a donc

$$g(t-\tau)\,f(\tau)-f(t-\tau)\,g(\tau)=0 \qquad \text{pour}\quad 0\leqslant\tau\leqslant t,$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(\tau)g(\sigma)-f(\sigma)g(\tau)=0 \qquad \text{pour}\quad \sigma,\tau\geqslant 0.$$

S'il existe un nombre $\sigma\geqslant 0$ tel que $f(\sigma)\neq 0$ ou bien $g(\sigma)\neq 0$, il suffit de poser $\alpha=g(\sigma)$ et $\beta=f(\sigma)$ pour avoir l'égalité (5). Dans le cas contraire, si $f=g=0$, les nombres α et β peuvent être tout à fait arbitraires.

Notre proposition se trouve donc démontrée.

Remarquons encore que les théorèmes (II) et (III) sont applicables au corps Q, car la condition (γ) est évidemment satisfaite dans tout corps, où la dérivation algébrique [satisfaisant aux conditions (α) et (β)] est définie. Ceci est important dans le calcul opérationnel, basé sur le corps Q [8]).

Une série d'interprétations analogues se laisse déduire de la précédente. On peut considérer des sous-anneaux de Q, par exemple les anneaux des fonctions réelles, des fonctions rationnelles etc. Dans ces cas, l'ensemble des constants du corps quotient est isomorphe à celui des nombres réels, rationnels, etc. respectivement. On peut aussi considérer l'anneau des fonctions (réelles ou complexes) localement sommables (c'est à-dire sommables dans tout intervalle fini); le corps quotient de cet anneau est isomorphe avec Q [9]); on peut démontrer de la même manière que ci-dessus que le corps d'éléments constants est, dans ce dernier cas, isomorphe au corps des nombres (complexes ou réels).

[6]) Le raisonnement qui suit m'a été communiqué oralement par M. Finkelsztejn.

[7]) M. Lerch, *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel*, Acta Mathematica **27**, 1903, p. 339-352.

[8]) Jan G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica **11**, 1950, p. 41-70.

[9]) Cf. [8]), p. 45.