Une généralisation des théorèmes de S. Mazurkiewicz et F. Bagemihl

Par

W. Sierpiński (Warszawa)

En 1914 S. Mazurkiewicz a démontré (en s'appuyant sur le théorème de Zermelo sur le bon ordre) qu'il existe un ensemble plan tel que toute droite située dans le plan rencontre cet ensemble en deux points seulement [1]).

Or, récemment, F. Bagemihl a démontré [2]) (en s'appuyant aussi sur le théorème de Zermelo) un théorème, d'où il résulte, en particulier, que si l'on fait correspondre à toute droite d, située dans le plan, un nombre cardinal $\mathfrak{m}_d$ tel que $2 \leqslant \mathfrak{m}_d \leqslant \aleph_0$, il existe un ensemble plan S tel que d a précisément $\mathfrak{m}_d$ points communs avec S.

Je démontrerai ici, à l'aide du théorème de Zermelo, la généralisation suivante des théorèmes de S. Mazurkiewicz et F. Bagemihl.

Théorème. *Supposons qu'à chaque droite d située dans un plan euclidien P, on ait fait correspondre un nombre cardinal $\mathfrak{m}_d$ tel que $2 \leqslant \mathfrak{m}_d \leqslant 2^{\aleph_0}$. Il existe alors un ensemble plan S tel que $\overline{\overline{dS}} = \mathfrak{m}_d$ pour toute droite d située dans le plan P.*

Démonstration. Du théorème de Zermelo résulte que si l'on désigne par φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\varphi}$, du type φ, formée de tous les points du plan P; vu que l'ensemble de toutes les droites situées dans P est de puissance $2^{\aleph_0}$ et que $2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^2$, il existe une suite transfinie $\{d_\xi\}_{\xi<\varphi}$, du type φ, dont les termes sont des droites situées dans P, et telle que, pour toute droite d située dans P, il y a $2^{\aleph_0}$ nombres ordinaux distincts $\xi < \varphi$ tels que $d_\xi = d$.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{q_\xi\}_{\xi<\varphi}$ du type φ de points du plan P.

Soit q_1 le premier terme de la suite $\{p_\xi\}_{\xi<\varphi}$ qui est un point de la droite d_1. Soit α un nombre ordinal donné, $1 < \alpha < \varphi$; supposons avoir déjà défini tous les points q_ξ, où $\xi < \alpha$, et que, pour tout nombre ordinal

1) Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Année 7 (1914), p. 382-383.

2) Annals of Mathematics **55** (1952), p. 34.

$\zeta < \alpha$, toute droite située dans P et distincte de chaque droite d_ξ, où $\xi \leqslant \zeta$, contienne au plus deux points de la suite $\{q_\xi\}_{\xi \leqslant \zeta}$. Il en résulte immédiatement que toute droite située dans P et distincte de chaque droite d_ξ, où $\xi < \alpha$, contient au plus deux points de la suite $\{q_\xi\}_{\xi < \alpha}$.

Soit T_α l'ensemble formé de toutes les droites d_ξ, où $\xi < \alpha$, et de toutes les droites du plan P qui passent par deux points au moins de la suite $\{q_\xi\}_{\xi < \alpha}$. Comme $\alpha < \varphi$, l'ensemble T_α est de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Les points d'intersection de la droite d_α avec les droites de T_α, distinctes de d_α, forment donc un ensemble E_α de puissance $< 2^{\aleph_0}$ et la droite d_α contient $2^{\aleph_0}$ points qui n'appartiennent ni à E_α ni à la suite $\{q_\xi\}_{\xi < \alpha}$. Si l'ensemble des points de d_α qui sont des termes de la suite $\{q_\xi\}_{\xi < \alpha}$ est de puissance $\mathfrak{m}_{d_\alpha}$, posons $q_\alpha = q_1$; dans le cas contraire, soit q_α le premier terme de la suite $\{p_\xi\}_{\xi < \varphi}$, tel que $q_\alpha \bar{\in} E_\alpha$ et $q_\alpha \neq q_\xi$ pour $\xi < \alpha$.

On voit sans peine que toute droite d située dans le plan et distincte de chaque droite d_ξ, où $\xi \leqslant \alpha$, contient au plus deux points de la suite $\{q_\xi\}_{\xi \leqslant \alpha}$.

La suite transfinie $\{q_\xi\}_{\xi < \varphi}$ est ainsi définie par l'induction transfinie. Démontrer que l'ensemble S de tous les termes de cette suite satisfait aux conditions du théorème n'offre pas de difficulté.

An Extension of Sperner's Lemma, with Applications to Closed-Set Coverings and Fixed Points

By

F. Bagemihl (Rochester, N. Y.)

I. Introduction. The methods used in this paper are closely patterned after, and intended to enlarge to some extent the range of, those developed by Sperner, Knaster, Kuratowski, and Mazurkiewicz in [4] and [2]. We first introduce below the notion of an *n-dimensional m-plex*, which is, roughly speaking, what one obtains from an n-dimensional simplex by cutting out a finite number, $m-1$, of n-dimensional simplexes. Sperner's Lemma (see [2]; [3], p. 193; [4]) is then sharpened and extended (Lemma 1, Corollary 1) to m-plexes satisfying certain simple conditions (pertaining either to the nature of m or to the orientation of the constituent simplexes). This extension is applied to obtain generalizations (Theorem 1, Corollary 2) of theorems — one of Knaster, Kuratowski, and Mazurkiewicz (see [2]; [3], p. 194), which they used to give a proof of Brouwer's Fixed-Point Theorem, and one of Sperner (see [2]; [3], p. 194; [4]), which he used to give a proof of the invariance of dimension — on closed-set coverings; a fixed-point theorem (Theorem 2) for n-dimensional m-plexes with m odd, derived along the lines of the proof of Brouwer's Theorem given in [2] (or [3], p. 196); a corollary (Corollary 3) on retraction; and a generalization (Theorem 3) of Kakutani's theorem [1] on fixed points.

II. Preliminaries. Let S be an n-dimensional (closed) simplex with vertices $v_0, v_1, \ldots, v_n$; we shall write $S = (v_0 v_1 \ldots v_n)$. Its k-dimensional $(0 \leqslant k \leqslant n)$ face with vertices $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ will be denoted by $v_{i_0} v_{i_1} \ldots v_{i_k}$. If $n > 0$, we shall denote by $S^+ = +(v_0 v_1 \ldots v_n)$ the oriented simplex obtained from S by giving its vertices the order of succession indicated by the order in which these vertices are written down.

An oriented n-dimensional simplex $+(v_0' v_1' \ldots v_n')$ is said to have the *same orientation* as $+(v_0 v_1 \ldots v_n)$, if, and only if, there exists a continuous deformation $D\{+(v_0' v_1' \ldots v_n')\} = +(v_0 v_1 \ldots v_n)$ such that $D(v_i') = v_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. If $+(v_0' v_1' \ldots v_n')$ does not have the same orientation as $+(v_0 v_1 \ldots v_n)$, then it is said to have the *opposite orientation.*