Remarque sur la notion d'ensemble parfait de 1re espèce.

Dans ma dernière note „*Sur un problème de la théorie de la mesure II*" j'ai introduit la notion d'ensemble parfait de 1re espèce que je croyais nouvelle. Je ne connaissais pas les belles recherches de M. A. Denjoy publiées dans les *C. R. de l'Accademia dei Lincei*[1]) que M. Sierpiński a eu la grande obligeance de me signaler tout dernièrement.

Pour définir les ensembles de 1re espèce, qu'il appelle ensembles présentant le caractère (A), M. A. Denjoy part de la „Propriété I" que j'établis dans le $n^0 1$ de ma note. Les deux définitions, celle de M. Denjoy et la mienne, sont équivalentes, chacune d'elles entraînant nécessairement l'autre, mais celle que j'ai adoptée me paraît plus commode, du moins dans l'étude des problèmes que j'envisage dans mon travail. Elle conduit directement à la „Propriété II" et au théorème du $n^0 2$ que je considère comme particulièrement important. C'est sur ce théorème que reposent, en effet, toutes mes conclusions, et la plupart des propriétés connues des ensembles parfaits de 1re espèce en découlent immédiatement.

Soient, comme dans le $n^0 2$, E_x et E_y deux ensembles parfaits de 1re espèce construits sur deux segments de Ox et Oy. L'ensemble plan E formé à partir de E_x et E_y est enfermé à l'intérieur d'un rectangle.

Soient maintenant d une droite quelconque coupant le rectangle et d_0 la portion de d comprise à son intérieur. On peut alors énoncer le critère suivant qui est un corollaire immédiat du théorème du $n^0 2$:

1^0) Si les extrémités de d_0 sont situées sur deux côtés adjacents du rectangle, la droite d passe par un point de E;

2^0) Si ces extrémités sont situées sur deux côtés parallèles, — pour que la droite d passe par un point de E, il faut et il suffit que les extrémités de d_0 n'appartiennent pas à une même bande noire perpendiculaire à ces côtés.

On peut établir la plupart des propriétés si curieuses données par M. Denjoy en s'appuyant sur ce critère. Pour établir p. ex. la proposition I (loc. cit. p. 293), il suffit de supposer $E_x = E_y$ et d'en-

[1]) Accademia dei Lincei, 1920, p. 291 et 316.

visager la projection E_λ de E sur la droite $O\lambda$ formant avec Ox un angle $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$. De même, pour démontrer la dernière proposition de M. Denjoy (p. 317, application), on envisagera la projection de E sur $O\lambda$, l'angle ϑ étant défini par les relations $p = r\cos\vartheta$, $q = r\sin\vartheta$ (on suppose $|p| \leqslant |q|$).

Soient δ_i les intervalles noirs intérieurs au segment $\alpha\beta$ de M. Denjoy. Voici alors comment on peut préciser l'énoncé de la dernière proposition de M. Denjoy:

Pour que l'ensemble des nombres $px + qy$ soit un segment continu, il faut et il suffit qu'on ait

$$\delta_i \leqslant \left|\frac{p}{q}\right| (\beta - \alpha).$$