Sur un problème de la théorie de la mesure. I.

Par

D. Mirimanoff (Genève).

Dans l'étude de certaines questions relatives à la théorie des fonctions on est conduit parfois à envisager le problème suivant [1]).

Soient E_x un ensemble de mesure nulle réparti sur l'axe Ox, E_y un ensemble de mesure nulle réparti sur l'axe Oy (axes rectangulaires). Menons par les points de E_x des parallèles à Oy et par les points de E_y des parallèles à Ox, et soit E l'ensemble de *tous* les points d'intersection de ces deux familles de droites. Désignons par E_λ la projection orthogonale de E sur une droite $O\lambda$ faisant avec Ox un angle quelconque ϑ. La mesure de E_λ est une fonction $f(\vartheta)$ de ϑ qui s'annule pour $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Quelle est cette fonction, admet elle d'autres zéros?

La solution est immédiate, lorsque l'un au moins des ensembles E_x, E_y est dénombrable. En effet, dans ce cas la mesure de E'_λ est nulle quel que soit ϑ, donc $f(\vartheta) = 0$. Mais il n'en est plus de même si aucun des ensembles E_x, E_y n'est dénombrable.

Je donnerai la solution de ce problème dans le cas particulièrement simple, où chacun des ensembles E_x, E_y est un ensemble parfait de Cantor. Cette étude se rattache par certains côtés à l'intéressante note de M. Sierpiński „Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel" parue dans le t. I. des Fundamenta.

1. Je m'appuierai sur quelques propriétés, en partie connues, de l'ensemble parfait de Cantor.

Soit E l'ensemble parfait de Cantor construit sur un intervalle (a, b). Je rappelle que l'ensemble complémentaire $C(E)$ se compose

[1]) C'est M. M. Plancherel qui a attiré mon attention sur ce problème.

d'une infinité d'intervalles (intervalles noirs d'après M. W. H. Young), qu'on construit à l'aide d'une suite ω d'opérations connues. La n^e opération ou opération de rang n introduit 2^{n-1} intervalles noirs de rang n, chacun desquels est bordé de deux intervalles blancs de *même longueur*. Ces intervalles blancs sont morcelés par les opérations suivantes. Il est commode de considérer les deux parties de la droite qui sont extérieures à (a, b) comme un seul intervalle de rang 0.

Propriété I. La longueur de l'intervalle qui sépare deux intervalles noirs δ, δ' de rangs m et n $(m \leqslant n)$ n'est pas inférieure à celle de δ'.

En effet, chaque fois qu'un intervalle noir est introduit par une opération de Cantor il apparait bordé de deux intervalles blancs de même longueur que lui; par conséquent δ' est séparé des intervalles noirs δ de même rang ou de rang inférieur par des intervalles dont la longueur est au moins égale à celle de δ'.

Propriété II. Si α, β sont deux points quelconques de (a, b) n'appartenant pas à un même intervalle noir de l'ensemble de Cantor E construit sur (a, b) (l'un des points α, β peut être situé en dehors de (a, b)) et si $\mathcal{E}$ est l'ensemble de Cantor construit sur (α, β), les ensembles E et $\mathcal{E}$ ont des points communs.

Dém. Il suffit de démontrer la propriété II dans le cas où chacun des points α, β appartient à un intervalle noir de E. Construisons sur (α, β) l'ensemble de Cantor $\mathcal{E}$. La première opération (opération de rang 1) introduit un intervalle noir de $\mathcal{E}$; soient α', β' ses extrémités. En vertu de la propriété I, l'un au moins des intervalles (α', α), (β', β), par exemple (α, α'), contient des points de E; en effet (α', β') ne peut pas recouvrir entièrement l'espace qui sépare les intervalles noirs de E dont font partie α et β.

On raisonnera sur (α, α') comme on a raisonné sur (α, β). On aura ainsi une suite d'intervalles (α, β), $(\alpha, \alpha'), \ldots$ s'emboîtant les uns dans les autres et dont la longueur tend vers 0. Cette suite définit un point c. Or chacun de nos intervalles contient des points de E et des points de $\mathcal{E}$; par conséquent c est à la fois un point limite de E et de $\mathcal{E}$, et comme les ensembles E et $\mathcal{E}$ sont fermés, c appartient à E et à $\mathcal{E}$. La propriété II est démontrée.

2. Supposons les axes Ox, Oy rectangulaires et soient A, B, C les points dont les coordonnées sont 1, 0; 0, 1; 1, 1. Désignons par E_x l'ensemble parfait de Cantor construit sur OA, par E_y l'ensemble de Cantor construit sur OB. Par les points de E_x menons des droites parallèles à Oy, par les points de E_y des droites parallèles à Ox et soit E l'ensemble de *tous* les points d'intersection de ces deux familles de droites.

Projetons E orthogonalement sur une droite $O\lambda$ faisant un angle ϑ avec l'axe Ox.

Quelle est la mesure de l'ensemble E_λ ainsi défini?

Je chercherai à résoudre ce problème.

Par des raisons de symétrie, on peut se borner au cas où l'angle ϑ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Supposons donc que ϑ vérifié l'inégalité

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Remarque. Les droites de la première famille (droites verticales) déterminent sur BC un ensemble de Cantor que j'appellerai E_x^*; à tout point α de E_x correspond un point α^* de E_x^* et à un intervalle noir δ de E_x un intervalle noir δ^* de E_x^*. Tout intervalle noir δ détermine une bande noire verticale limitée par deux droites de la première famille passant par les extrémités de δ. Envisageons maintenant une droite quelconque d coupant le carré $OABC$ et normale à $O\lambda$. Soient α^* et β les points où cette droite rencontre les droites BC et OA; l'un au moins de ces points est situé sur le périmètre du carré. On a alors le théorème suivant:

Théorème. Si α^* et β n'appartiennent pas à une même bande noire verticale, la droite d passe par un point de E.

Dém. Les droites de la seconde famille (droites parallèles à Ox) déterminent sur (α^*, β) un ensemble parfait de Cantor $\mathcal{E}'$. Projetons cet ensemble sur Ox; on aura un ensemble de Cantor $\mathcal{E}$ construit sur (α, β), où α est la projection de α^*.

Or les points α, β n'appartiennent pas à un même intervalle noir de E_x; l'ensemble $\mathcal{E}$ et l'ensemble E_x ont donc des points communs, en vertu de la propriété II. Soit c l'un de ces points. Le points c est la projection sur Ox d'un point c' de la droite d. Or c' est l'intersection d'une droite de la I^re^ famille, puisque c est un point de E_x, et d'une droite de la 2^me^ famille, puisque c fait partié de $\mathcal{E}$ et par conséquent c' de $\mathcal{E}'$; c' est donc un point de E. C, Q. F. D.

3. Mesure de E_λ. L'ensemble E_λ est réparti sur OC', C' étant la projection du sommet C du carré $OBAC$ sur $O\lambda$. Or, la longueur de $OC' = \sin\lambda + \cos\lambda$. Il suffira donc, pour avoir la mesure de E_λ, de retrancher de $\sin\lambda + \cos\lambda$ la mesure de l'ensemble complémentaire $c(E_\lambda)$ c'est-à-dire la mesure de l'ensemble de tous les points noirs de E_λ.

Or les points noirs de E_λ sont fournis pas les droites d normales à $O\lambda$ et telles que α^*, α appartiennent à une même bande noire. Considérons l'une de ces bandes dont la section est un intervalle noir δ de E_x de rang n. La longueur de δ étant égale à $\frac{1}{3^n}$, pour que cette bande fournisse des points noirs à E_λ, il faut et il suffit que $\operatorname{tg}\vartheta < \frac{1}{3^n}$. Par conséquent l'ensemble des points noirs dus à la bande est un intervalle dont la longueur est $\left(\frac{1}{3^n} - \operatorname{tg}\vartheta\right)\cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta}{3^n} - \sin\vartheta$, et comme le nombre des intervalles δ de rang n est égal à 2^{n-1}, la mesure de l'ensemble des intervalles noirs fournis par les bandes de rang n est $2^{n-1}\left(\frac{\cos\vartheta}{3^n} - \sin\vartheta\right)$.

Il en résulte que la mesure de l'ensemble complémentaire est égale à

$$\sum_{n=1}^{n=n(\vartheta)} 2^{n-1}\left(\frac{\cos\vartheta}{3^n} - \sin\vartheta\right),$$

où $n(\vartheta)$ vérifie les inégalités

$$\frac{1}{3^{n(\vartheta)+1}} \leqslant \vartheta < \operatorname{tg}\frac{1}{3^{n(\vartheta)}}.$$

Par conséquent la mesure du complémentaire

$$m(c(E_\lambda)) = \sin\vartheta + \cos\vartheta - (\tfrac{2}{3})^{n(\vartheta)}\cos\vartheta - 2^{n(\vartheta)}\sin\vartheta.$$

Enfin

$$m(E_\lambda) = 2^{n(\vartheta)}\left(\sin\vartheta + \frac{1}{3^{n(\vartheta)}}\cos\vartheta\right),$$

où ϑ est un angle vérifiant l'inégalité

$$0 < \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

4. On voit que l'ensemble complémentaire $C(E_\lambda)$ se compose d'un nombre fini d'intervalles noirs. Ce nombre, qui est égal à $2^{n(\vartheta)}-1$, peut du reste être nul (lorsque $\operatorname{tg}\vartheta \geqslant \frac{1}{3}$); l'ensemble E_λ épuise alors l'intervalle OC' sur lequel il est réparti. En particuler E_λ épuise la diagonale du carré pour $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

Cette dernière propriété peut du reste être établie directement [1]) de la manière suivante. Soit P un point quelconque de E, x et y ses coordonnées. La projection OP' de OP sur $O\lambda$ est alors $x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$, et pour $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $OP' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$. Or les nombres x et y s'écrivent dans le système de numération de base 3 avec les seuls chiffres 0 et 2, et l'on sait que les sommes $x+y$ de deux nombres quelconques de cette forme fournissent tous les nombres réels compris entre 0 et 2. Ce fait est à rapprocher d'un exemple intéressant donné par M. Sierpiński dans la note citée des Fundamenta p. 106.

5. Nous venons de voir que E_λ est l'ensemble des points P' tels que $OP' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$. Les sommes de cette forme fournissent donc tous les nombres réels compris entre 0 et $\cos\vartheta + \sin\vartheta$, si $\operatorname{tg}\vartheta \geqslant \frac{1}{3}$, mais pour $\operatorname{tg}\vartheta < \frac{1}{3}$ des espaces lacunaires apparaissent qui se calculent facilement.

Envisageons maintenant la forme $\mu x + \nu y$, où μ et ν sont deux nombres réels positifs. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait $\mu \geqslant \nu$ et posons $\mu = r\cos\vartheta$, $\nu = r\sin\vartheta$, donc $\vartheta \geqslant \frac{\pi}{4}$. La somme $\mu x + \nu y$ s'écrira

$$r(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta).$$

Si donc x et y sont deux nombres quelconques de l'ensemble parfait de Cantor construit sur $(0, 1)$ (c'est-à-dire deux nombres qui dans le système de numération de base 3 s'écrivent avec les seuls chiffres 0 et 2) et si $\frac{\mu}{\nu} < \frac{1}{3}$, les sommes $\mu x + \nu y$ ne fournissent pas tous

[1]) Cette propriété a été obtenue déjà en 1917 par M. H. Steinhaus et prouvée par une voie géométrique (dans une note publiée en polonais dans la revue „Wektor", t.). M. Steinhaus en déduit pour tout α réel de l'intervalle $(0, 1)$ l'existence de deux points de l'ensemble E de Cantor, dont la distance est α (*Remarque de la Rédaction*).

les nombres réels compris entre 0 et $r(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$; il y a des espaces lacunaires.

Les propriétés que j'établis dans cette note peuvent être étendues en partie aux ensembles parfaits possédant la propriété I. Il serait intéressant aussi de généraliser la propriété arithmétique que je viens de signaler.

Errata.

Page 79, ligne 19:

$$\textit{au lieu de } \frac{1}{3^{n(\vartheta)+1}} \leqslant \vartheta < \operatorname{tg} \frac{1}{3^{n(\vartheta)}} \textit{ lire } \frac{1}{3^{n(\vartheta)+1}} \leqslant \operatorname{tg} \vartheta < \frac{1}{3^{n(\vartheta)}}.$$

Page 80, ligne 23:

$$\textit{au lieu de } \vartheta \geqslant \frac{\pi}{4} \textit{ lire } \vartheta \leqslant \frac{\pi}{4}.$$