Sur les suites de fonctions analytiques bornées dans leur ensemble.

Par

A. Khintchine (Moscou).

M. Montel a démontré que, pour une suite

(1) $$f_1(z),\ f_2(z), \ldots,\ f_n(z), \ldots$$

de fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un contour simple et sur le contour lui-même, la convergence en tout point d'un arc quelconque du contour entraîne la convergence uniforme dans tout domaine complètement intérieur au contour. Je me propose dans la note présente de généraliser cette proposition, en démontrant que, pour un contour rectifiable, la condition indiquée peut être remplacée par une moins restrictive, à savoir *celle de la convergence de la suite* (1) *en tout point d'un ensemble de mesure non nulle situé sur le contour.* En utilisant une représentation conforme convenablement choisie, on voit de suite [1]) qu'il suffit de démontrer la proposition pour le cas d'un cercle quelconque.

Soit donc, par impossible, la suite (1) convergente en tout point d'un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure non nulle situé sur la circonférence C de rayon $\dfrac{1}{2\pi}$ ayant l'origine pour centre, et divergente en un point intérieur à C. D'après les résultats bien connus de M. Montel, on peut alors extraire de la suite (1) deux suites: $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \ldots, f_{n_k}(z), \ldots$

[1]) Il faut faire appel à un théorème important de MM. Lusin et Privaloff. (voir I. I. Privaloff, *L'intégrale de Cauchy,* Saratow 1919 [en russe]) d'après lequel *toute représentation conforme qui fait correspondre l'intérieur d'un contour rectifiable C à l'intérieur d'un autre contour rectifiable $\mathcal{C}$, transforme un ensemble quelconque de mesure non nulle situé sur C en un ensemble de même sorte situé sur $\mathcal{C}$.*

et $f_{m_1}(z), f_{m_2}(z), \ldots, f_{m_k}(z), \ldots$ qui convergent en tout point intérieur du cercle considéré, en représentant à l'intérieur de ce cercle deux fonctions holomorphes différentes. Posons

$$\varphi_k(z) = f_{n_k}(z) - f_{m_k}(z).$$

La suite

$$\text{(2)} \qquad \varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \ldots,\ \varphi_k(z), \ldots$$

converge vers zéro en tout point de $\mathcal{E}$ et vers une fonction non identiquement nulle à l'intérieur du cercle. De plus, les fonctions φ sont bornées dans leur ensemble. Nous allons montrer que ce fait conduit à une contradiction.

A cet effet, démontrons un lemme géométrique.

Soit E un ensemble mesurable situé sur la circonférence en question. Je désigne par E_α l'ensemble obtenu de E par une rotation d'angle α autour de l'origine.

Lemme géométrique. — *La mesure de E étant supposée plus petite que 1 et ε désignant un nombre positif quelconque, on peut trouver un ensemble fini d'angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que la mesure de la partie commune aux ensembles $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_n}$ soit plus petite que ε^n.*

Voici les éléments de la démonstration Soit $g(x)$ la fonction égale à 1 dans E et à zéro dans le complémentaire E' de E par rapport à la circonférence totale. La mesure de l'ensemble en question s'exprime par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(xe^{-\alpha_1 i})\,g(xe^{-\alpha_2 i})\ldots g(xe^{-\alpha_n i})\,d\varphi = I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

où l'on a posé $x = \frac{1}{2\pi}e^{\varphi i}$.

Or, intégrons cette fonction entre les limites

$$\text{(3)} \qquad 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{2\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n} \leqslant \alpha_2 \leqslant 2\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n} \leqslant \alpha_n \leqslant 2\pi.$$

On voit aisément que l'intégrale est égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\prod_{k=1}^{n} Mes\left\{E, \left(xe^{(k-1)\frac{2\pi}{n}i},\ xe^{k\frac{2\pi}{n}i}\right)\right\}\right]d\varphi,$$

$Mes\{E, (a, b)\}$ désignant la mesure de la partie de l'ensemble E comprise entre les points a et b de la circonférence. Supposons que parmi les n arcs

$$(xe^{(k-1)\frac{2\pi}{n}i}, xe^{k\frac{2\pi}{n}i}) \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

il y a p renfermant une partie de E de mesure plus grande que $\frac{\sigma}{n}$, σ étant un nombre positif donné d'avance. On s'assure de suite que p reste plus grand que $n\frac{Mes E'}{2}$ à partir d'une valeur suffisamment grande de n, et cela uniformément par rapport à x; on trouve donc

$$\int_D I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 d\alpha_2, \dots d\alpha_n < \frac{1}{n^n} \sigma^{\frac{n Mes E'}{2}},$$

en désignant par D le domaine défini par les inégalités (3). En choisissant $\sigma < \varepsilon^{\frac{2}{Mes E'}}$, l'intégrale devient plus petite que ε''; donc, le volume de D étant $\frac{1}{n^n}$, on doit pour des valeurs convenables de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ avoir

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < \varepsilon'',$$

ce qui démontre l'affirmation.

Ce point acquis, soient r et r' deux nombres positifs tels que $r < r' < \frac{1}{2\pi}$ et soient c et c' les circonférences de rayons r et r' respectivement, ayant leurs centres à l'origine. Appliquons le lemme à l'ensemble $\mathcal{E}'$ [1]) et posons

$$\psi_k(z) = \varphi_k(ze^{\alpha_1 i}) \varphi_k(ze^{\alpha_2 i}) \dots \varphi_k(ze^{\alpha_n i}).$$

La suite

(4) $$\psi_1(z), \psi_2(z), \dots, \psi_k(z), \dots$$

converge à l'intérieur de C vers une fonction holomorphe $\psi(z)$; de plus, elle converge vers zéro en tout point de C sauf peut-être aux points d'un ensemble M de mesure $< \varepsilon''$; enfin, on peut supposer $|\psi_k(z)| < 1$ dans C.

Soit x un point de c. Soit P un ensemble parfait contenu dans $M' = C - M$ et de mesure $> 1 - \varepsilon''$. Considérons un contour Γ provenant de C par remplacement des arcs contigus à P par des

[1]) Complémentaire de $\mathcal{E}$ par rapport à la circonférence C.

lignes quelconques intérieures à C, extérieures à c' et de longueur totale $<\varepsilon^n$, ce qui est évidemment toujours possible. La suite (4) étant convergente sur Γ, on a d'après les résultats de M. Montel

$$|\psi(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{\psi(z)}{z-x}\,dz\right| < \frac{\varepsilon^n}{2\pi(r'-r)}.$$

Or, $\psi(x) = \varphi(xe^{\alpha_1 i})\,\varphi(xe^{\alpha_2 i})\ldots\varphi(xe^{\alpha_n i})$.

Par conséquent, on a tout au moins pour une valeur de $p\ (p=1,2,\ldots,n)$

$$|\varphi(xe^{\alpha_p i})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[n]{2\pi(r'-r)}};$$

ε étant aussi petit que l'on veut, $\varphi(z)$ doit s'annuler sur c; donc, r étant quelconque, $\varphi(z)$ est identiquement nulle. C. Q. F. D.