Problèmes.

21) A étant un ensemble de nombres réels qui n'est de I catégorie dans aucun intervalle, existe-il une décomposition: $A=B+C$, $B\times C=0$ telle que ni B ni C ne soient de I catégorie dans aucun intervalle?

Remarque. On en pourrait donner la solution affirmative dans l'hypothèse supplémentaire que A possède la propriété de Baire (au sens etabli dans ce volume), p. 319. M. Sierpiński en a signalé, d'autre part, la solution affirmative dans l'hypothèse du continu, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

Problème de M. Kuratowski.

22) Appellons l'ensemble (linéaire) E *parfaitement mesurable*, si tout ensemble homéomorphe à E est mesurable au sens de Lebesgue. Quelle est la puissance de la classe des ensembles parfaitement mesurables? Un ensemble complémentaire à un ensemble parf. mesurable est-il toujours parf. mesurable?

Problème de M. Urysohn.

23) Existe-t-il une fonction d'une variable réelle $f(x)$ pantachiquement dicontinue et telle qu'on ait pour tout x réel

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=0?$$

Problème de M. Steinhaus.

24) Une fonction satisfaisant à la condition de Baire, est-elle nécessairement mesurable (L)? Quelle est la puissance de toutes les fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de Baire? (On dit qu'une fonction $f(x)$ satisfait à la condition de

Baire, si elle continue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait).

Problème de M. Sierpiński.

25) Un ensemble plan, tel que toute droite le rencontre en deux (et seulement deux) points, peut-il être mesurarable (B)? (L'existence d'un tel ensemble a été démòntré, à l'aide du théorème de M. Zermelo, par MM. Mazurkiewicz[1]) (en 1914) et Rosenthal[2]) (en 1922)).

Problème de M. Sierpiński.

Problèmes résolus.

Probl. 1) Lorsque un ensemble de points P est une image biunivoque et continue (dans un sens) de Q et Q est une image biunivoque et continue de P, peut-on affirmer que les ensembles P et Q sont homéomorphes?

Solution *négative* de M. Kuratowski, *Fund Math.* t. II, pp. 158—160.

4) Existe-il une décomposition d'un intervalle en $\aleph_1$ ensembles mesurables (B), non-vides et sans points communs deux à deux?

Solution *affirmative* de MM. Lusin et Sierpiński, *Comptes Rendus*, t. 175, p. 357 (note du 21 août 1922).

6, troisième partie) Peut-on démontrer qu'un produit de $\aleph_1$ ensembles (A) n'est pas nécessairement un ensemble (A)?

Solution affirmative de MM. Lusin et Sierpiński, *Journ. de Math.* 1923 (Les auteurs définissent un ensemble qui est complémentaire d'un ensemble (A) sans être (A) lui-même. Ils prouvent, en même temps, que le complémentaire d'un ensemble (A) est le produit de $\aleph_1$ ensembles (A))

8) Peut-on donner un exemple effectif d'un ensemble de nombres réels E, tel que toute somme, toute différence, tout produit et tout quotient de deux nombres de E (excepté la division par 0) appartienne à E, et que E soit non-dénombrable, distinct de l'ensemble de tous les nombres réels?

Solution affirmative de M. Souslin, *Fund. Math.* IV, p. 311.

10, première partie) Existe-il une fonction de deuxième classe qui ne soit pas la limite de fonctions presque partout discontinues?

Soluton *affirmative* de M. Zalcwasser.

[1]) Comptes Rendus de la Soc. des Sciences de Varsovie, t. VII, p. 382.
[2]) Sitzungsber d. Bayer. Akad. d. Wiss., math-phys. Kl. 1922, p. 223

12) Un ensemble ordonné dont tous les sous-ensembles bien ordonnés (croissants ou décroissants) sont au plus dénombrables, a-t-il nécessairement une puissance non supérieure à celle du continu?

Solution *affirmative* de M. Urysohn, *Fund. Math.* V (à paraître).

15) Existe-il un continu dont tout sous-continu est indécomposable?

Solution *affirmative* de M. Knaster, *Fund. Math.* III pp. 247–286.

16) Existe-il un continu qui est une somme de ses vrais sous-continus saturés disjoints?

Solution *affirmative* de MM. Knaster et Kuratowski, *Fund. Math.* V (à paraître).