Sur l'invariance topologique de la propriété de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous dirons qu'un ensemble E, situé dans l'espace à m dimensions, *jouit de la propriété de Baire*, si tout ensemble parfait P, sur lequel E est de deuxième catégorie, contient une portion [1]) Π, telle que $\Pi - E$ est de première catégorie sur P [2]).

Le but de cette Note est de démontrer le suivant

Théorème 1. *Un ensemble homéomorphe d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire jouit de la même propriété.*

Notre théorème résultera sans peine du théorème suivant:

Théorème 2. *Pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété de Baire, il faut et il suffit que tout sous-ensemble D de E qui est dense en soi et fermé relativement à E* [3]) *soit une somme de deux ensembles, dont l'un est de première catégorie sur D et l'autre est un G_δ* [4]).

Démonstration. Soit E un ensemble jouissant de la propriété de Baire et soit D un sous-ensemble de E qui est dense en soi et fermé relativement à E. Soit H la somme d'intérieurs de toutes les sphères rationnelles [5]) S, telles que la partie de D contenue à l'interieur de S est de 1[re] catégorie sur D (l'ensemble H est donc ouvert ou vide). L'ensemble de toutes les sphères ration-

[1]) Nous appelons *portion* d'un ensemble parfait P tout produit $P\Sigma$, où Σ est une sphère (fermé) dont l'intérieur contient des points de P.

[2]) Voir H. Lebesgue: *Journ. de Math.* t 1, 6[e] série (1905) p. 187.

[3]) c. à. d. $D'E \subset D$.

[4]) c. à. d. produit dénombrable d'ensembles ouverts.

[5]) c. à. d. dont le rayon et les coordonnées du centre sont rationnelles.

nelles étant dénombrable, on voit que l'ensemble DH est de 1^{re} cat. sur D.

Soit $R = D - H$. Si $R = 0$, D est un ensemble de 1^r cat. sur lui-même et la condition du théorème 2 est évidemment remplie. Supposons donc $R \neq 0$ et soit p un point de R, S — une sphère rationnelle ouverte contenant p. L'ensemble DS est de 2^{me} cat. sur D: sinon, on aurait (d'après la définition de H) $S \subset H$ et $p \varepsilon H$, ce qui est impossible, puisque $RH = 0$.

Or, l'ensemble DS étant de 2^{me} cat. sur D, on voit sans peine que DS est de 2^{me} cat. sur $\overline{DS} = DS + (DS)'$. Donc, à plus forte raison, l'ensemble $E \supset DS$ est de 2^{me} cat. sur $\overline{DS}$. Or l'ensemble $P = \overline{DS}$ est parfait (S étant ouvert et D étant dense en soi). L'ensemble E jouissant de la propriété de Baire, il existe donc une sphère fermée Σ contenante à son intérieur de points de P et telle que $P\Sigma - E$ est de 1^{re} cat. sur P.

Or, d'aprés $D'E \subset D$ nous trouvons $PE = \overline{DS} \,.\, E \subset \overline{D} \,.\, E \subset D$, donc $P\Sigma - E = P\Sigma - PE \supset P\Sigma - D$. Par conséquent l'ensemble $P\Sigma - D$ est de 1^{re} cat. sur P.

La sphère Σ contenant à son intérieur des points de $P = \overline{DS}$, il existe un point π de DS intérieur à Σ. Il existe donc une sphère rationnelle ouverte T intérieure Σ et à S et contenant π, donc un point D. L'ensemble $P\Sigma - D$ étant de 1^{re} cat. sur P, nous concluons, à plus forte raison, le même pour l'ensemble $(P\Sigma - D)T = (P - D)T$. Or, T étant un ensemble ouvert, nous avons $\overline{DT} \supset \overline{D} \,.\, T$, donc, d'après $S \supset T$, $P = \overline{DS} \supset \overline{D} \,.\, T$ et $PT \supset \overline{DT}$, ce qui donne $PT = \overline{D}T$ (puisque $P \subset \overline{D}$). Nous avons donc $(P - D)T = (\overline{D} - D)T$ et cet ensemble est de 1^{re} cat. sur P et, à plus forte raison, sur $\overline{D} \supset P$.

Nous avons donc démontré que p étant un point de R et S une sphère rationnelle ouverte contenant p, il existe toujours une sphère rationnelle ouverte T contenue dans S, contenant des points de D et telle que l'ensemble $(\overline{D} - D)T$ est de 1^{re} cat. sur $\overline{D}$. Soit G la somme de toutes les sphères rationnelles ouvertes, telles que $(\overline{D} - D)T$ est de 1^{re} cat. sur $\overline{D}$: d'après ce que nous venons de démontrer, $R - G$ est non dense sur D

Les ensembles $(\overline{D} - D)T$ étant de 1^{re} cat. sur $\overline{D}$ et G étant une somme au plus dénombrable des sphères (rationnelles) T, nous concluons que l'ensemble $(\overline{D} - D)G$ est de 1^{re} cat. sur $\overline{D}$, donc

$$(\overline{D} - D)G = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots, \tag{1}$$

où $N_i (i=1,2,\ldots)$ sont des ensembles non denses sur $\overline{D}$, et $N_i \subset \overline{D}$. Donc aussi les ensembles $\overline{N}_i \subset \overline{D}$ sont non denses sur $\overline{D}$ et l'ensemble

$$K = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \ldots \tag{2}$$

est de 1[re] cat. sur $\overline{D}$. Or, d'après (2) nous avons

$$V = G(\overline{D} - K) = G \,.\, \overline{D} \,.\, \mathrm{C}(K) = \overline{D} \,.\, G \,.\, \mathrm{C}(\overline{N}_1) \,.\, \mathrm{C}(\overline{N}_2) \ldots,$$

ce qui prouve que V est un G_δ (les ensembles G et $C(\overline{N}_i)$ étant ouverts et $\overline{D}$ étant un G_δ, comme ensemble fermé). Or, d'après (2) et (1), nous trouvons $K \supset (\overline{D} - D)\, G$, donc $V = G(\overline{D} - K) \subset G\overline{D} - (\overline{D} - D)\, G = DG$. Donc V est un G_δ contenu dans D. Or, d'après $D = DH + R$, nous trouvons

$$D - V = D - G(\overline{D} - K) \subset D - G(D - K) \subset (D - G) + K$$
$$\subset DH + (R - G) + K;$$

donc, DH étant de 1[re] cat sur D, $R - G$ étant non dense sur $\overline{D}$, donc aussi sur D (puisque D est dense en soi) et K étant de 1[re] cat. sur $\overline{D}$, donc aussi sur D, nous concluons que $D - V$ est de 1[re] cat. sur D. La condition de notre théorème 2 est donc nécessaire.

Soit maintenant E un ensemble satisfaisant à la condition du théorème 2 et P — un ensemble parfait sur lequel E est de 2[me] catégorie. Soit H la somme des sphères rationnelles ouvertes S, telles que EPS est de 1[re] cat. sur P. L'ensemble EPH sera donc de 1[re] cat. sur P.

Si l'ensemble PH était dense sur P, l'ensemble $Q = P - H$ serait non dense sur P, donc aussi l'ensemble EQ, et l'ensemble $EP = EPH + EQ$ serait de 1[re] cat. sur P, contrairement à l'hypothèse. Donc PH n'est pas dense sur P et il existe une sphère ouverte T contenant des points de P et telle que $TH = 0$.

Soit p un point de PT, S — une sphère rationnelle ouverte contenant p et contenue dans T. L'ensemble EPS est de 2[me] cat. sur P: sinon, S ferait partie de H et on aurait $p \varepsilon H$, contrairement à $TH = 0$. Donc EPT est dense sur PT, donc aussi dense en soi (P étant parfait et T ouvert). Par conséquent l'ensemble $D = ETP + E(EPT)'$ sera dense en soi. Or, on reconnait sans peine que l'ensemble D est fermé relativement à E. D'après l'hypothèse du théorème 2 nous avons donc $D = M + N$, où M est un G_δ et N un ensemble de 1[re] cat. sur D, donc aussi sur P (puisque $N \subset D \subset P$). M étant un G_δ, nous avons $M = G_1 G_2 G_3 \ldots$, où G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles ouverts.

Je dis que l'ensemble M est dense sur PT. En effet, soit S une sphère rationnelle ouverte contenue dans T et contenant des points de P. L'ensemble EPS est, comme nous savons, de 2[me] cat. sur P, donc sur EPS, donc aussi l'ensemble $D \supset EPT \supset EPS$ est de 2[me] cat. sur EPS. Or, $D = M + N$, et N est de 1[re] cat. sur D, donc aussi (T étant ouvert) sur $DT = EPT$ (puisque $P' = P$ et $T'T = T$), donc aussi, sur EPS. L'ensemble D étant de 2[me] cat. sur EPS, il en résulte que M est de 2[me] cat. sur DPS, donc $MPS \neq 0$. Cela étant vrai pour toute sphère rationnelle ouverte S contenue dans T et contenant des points de P, il s'ensuit que M est dense sur PT. Donc, à plus forte raison, les ensembles ouverts $G_n \supset M$ sont denses sur PT (pour $n = 1, 2, \ldots$), donc leurs complémentaires CG_n sont non denses sur PT Il en résulte que l'ensemble $CM = CG_1 + CG_2 + \ldots$ et de 1[re] cat. sur PT. Or, $M \subset D \subset E$ et $CM \supset CE$: donc CE est de 1[re] cat. sur PT.

Soit Σ une sphère fermée intérieure à T et contenant à son intérieur des points de P (une telle sphère existe évidemment). L'ensemble CE étant de 1[re] cat. sur PT, il le sera à plus forte raison sur la portion $\Pi = P\Sigma$ de P, c'est-à-dire $\Pi - E$ est de 1[re] cat. sur P. L'ensemble E jouit donc de la propriété de Baire, ce qui prouve que la condition du théorème 2 est suffisante.

Notre théorème 2 est ainsi démontré. Pour en déduire le théorème 1, il suffit de remarquer que: 1° par une transformation homéomorphe d'un ensemble E tout son sous ensemble D dense en soi et fermé relativement à E se transforme en un sous-ensemble D_1 de l'image E_1 de E, dense en soi et fermé relativement à E_1; 2° par une transformation homéomorphe d'un ensemble D tout sous-ensemble de D non dense sur D se transforme en un sous-ensemble de l'image D_1 de D non dense sur D_1, donc tout sous-ensemble de D qui est de 1[re] cat. sur D — en un sous-ensemble de D_1 qui est de 1[re] cat. sur D_1; 3° la propriété d'être un G_δ se conserve par les transformations homéomorphes [1]).

[1]) Voir: S. Mazurkiewicz *Bull. Acad. Cracovie* 1916, p. 490; W. Sierpiński *C. R.* t. 171, p. 24.

Notre théorème 1 est ainsi démontré.

M. N. Lusin a démontré (à l'aide de l'axiome du choix) l'existence d'une famille remarquable d'ensembles jouissant de la propriété de Baire, notamment d'ensembles non dénombrables qui sont de 1re cat. sur tout ensemble parfait [1]): nous les appellerons „ensembles jouissant de la propriété de Lusin". On voit sans peine que *la propriété de Lusin d'un ensemble se conserve par les transformations homéomorphes de cet ensemble.* Pour le prouver il suffira de remarquer que pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété de Lusin, il faut et il suffit que tout son sous-ensemble dense en soi D soit de 1re catégorie sur lui-même.

D'après une remarque due à M. Kuratowski tout ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ peut être regardé comme projection orthogonale d'un ensemble plan jouissant de la propriété de Lusin et ayant tout au plus un point sur chaque verticale. Il en résulte que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, la propriété de Baire ne persiste pas après les transformations biunivoques et dans un sens continues.

[1]) *Fund. Math.* t. II, p. 155.