

Sur une fonction qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu.

Par

W. Sierpiński et A. Zygmund (Varsovie).

Le but de cette Note est de déduire du théorème de M. Zermelo (*Wohlordnungssatz*) l'existence d'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu.

Du théorème de M. Zermelo résulte l'existence d'une suite transfinie

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\alpha, \dots, \quad (\alpha < \Omega_c)$$

formée de tous les nombres réels différents, et nous pouvons supposer que cette suite est du type Ω_c , où Ω_c désigne le plus petit nombre transfini correspondant à la puissance du continu.

E étant un ensemble donné quelconque de nombres réels, l'ensemble de toutes les fonctions $f_x(x)$ définies seulement sur E et continues sur E , a, comme on sait, la puissance du continu. Or, la classe de tous les ensembles (linéaires) G_δ (c'est à-dire produits dénombrables d'ensembles ouverts) a aussi la puissance du continu. Donc l'ensemble Φ de toutes les fonctions $f_T(x)$, dont chacune est définie et continue sur un G_δ , a la puissance du continu. Il existe donc une suite transfinie du type Ω_c ,

$$(2) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\omega(x), \dots, \varphi_\alpha(x), \dots, \quad (\alpha < \Omega_c)$$

formée de toutes les fonctions de l'ensemble Φ . Désignons généralement par T_α cet ensemble G_δ sur lequel est définie et continue la fonction $\varphi_\alpha(x)$. Nous définirons maintenant une fonction d'une variable réelle $f(x)$ comme il suit.

Posons $f(x_1) = x_1$. Or, soit α un nombre ordinal donné > 1 et $< \Omega_c$ et supposons que nous avons déjà défini les nombres $f(x_\xi)$ pour $\xi < \alpha$. Nous définirons $f(x_\alpha)$ comme le premier nombre de la suite (1) différent de chacun des nombres

$$(3) \quad \varphi_\xi(x_\alpha), \quad \text{où } \xi < \alpha \text{ et } x_\alpha \in I_\xi.$$

L'ensemble de tous les nombres (3) étant (pour tout $\alpha < \Omega_c$ donné) de puissance non supérieure à celle du nombre transfini α , donc inférieure à celle du continu (d'après $\alpha < \Omega_c$ et la définition du nombre Ω_c comme plus petit nombre transfini de puissance du continu), il existe toujours des nombres de la suite (1) distincts de tous les nombres (3). Les nombres $f(x_\alpha)$ sont ainsi définis par l'induction transfinie pour tous les termes x_α de la suite (1), donc pour toutes les valeurs de la variable réelle. Nous avons ainsi défini la fonction $f(x)$ pour tous les x réels.

Nous prouverons maintenant que la fonction $f(x)$ ne peut être continue sur aucun ensemble de puissance du continu. A ce but nous démontrerons d'abord ce

Lemme. Si $f(x)$ est une fonction continue sur un ensemble E , il existe toujours un ensemble I qui est un G_δ contenant E , et une fonction $f_I(x)$, définie et continue sur I , telle que $f(x) = f_I(x)$ sur E .

Dém. Soit $f(x)$ une fonction qui est continue sur l'ensemble E . Nous prouverons que l'ensemble I de tous les points de $\bar{E} = E + E'$ en lesquels il existe une limite unique de $f(x)$ sur E (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points t_0 de E , tels que pour toute suite infinie $t_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ de nombres de E convergeant vers t_0 , la suite $f(t_n)$ converge) est un G_δ . Désignons, pour tout n naturel donné, par F_n l'ensemble de tous les points de \bar{E} en lequel l'oscillation de la fonction $f(x)$ relativement à E est $\geq 1/n$: on voit sans peine que les ensembles F_n sont fermés et que $S = \bar{E} - I = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$. Il en résulte que l'ensemble S est un F_σ , donc (\bar{E} étant fermé), l'ensemble $I = \bar{E} - S$ est un G_δ . Or, la fonction $f(x)$ étant continue sur E , nous avons évidemment $E \subset I$. Si l'on pose maintenant, en tout point x_0 de I , $f_I(x_0)$ égale à la limite au point x_0 de la fonction $f(x)$ sur E , on voit sans peine que la fonction $f_I(x)$ satisfait aux conditions de notre lemme qui est ainsi établi.

Admettons maintenant que la fonction $f(x)$ définie plus haut est continue sur un ensemble E de puissance du continu. D'après notre lemme, il existe un ensemble G_δ , $I \supset E$, et une fonction $f_I(x)$, définie et continue sur I , telle que

$$(4) \quad f(x) = f_I(x) \quad \text{pour } x \in E.$$

D'après la définition de la suite (2), la fonction $f_I(x)$ est un terme de cette suite, soit $f_I(x) = \varphi_\xi(x)$, et $I = T_\xi$. D'après (4) nous aurons $f(x) = \varphi_\xi(x)$ pour $x \in E$, donc pour un ensemble de puissance du continu de valeurs de $x \in T_\xi$: or, c'est impossible, puisque, d'après la définition de la fonction $f(x)$, nous avons $f(x_\alpha) \neq \varphi_\xi(x_\alpha)$ pour tout élément x_α de T_ξ dont l'indice α (dans la suite (1)) est $> \xi$, et par suite l'égalité $f(x) = \varphi_\xi(x)$ ne peut subsister que pour les nombres x_α de T_ξ dont les indices α sont $< \xi < \Omega_c$, donc pour les valeurs x de T_ξ formant un ensemble de puissance inférieure à celle du continu.

La fonction $f(x)$ est donc discontinue sur tout ensemble de puissance du continu, c. q. f. d.

Toute fonction jouissant de cette propriété est naturellement non mesurable (L), puisque, d'après un théorème connu de M. Lusin, toute fonction mesurable (L) est continue sur un ensemble parfait (dont le complémentaire peut avoir une mesure aussi petite que l'on veut).

Observons encore que si l'on admet l'hypothèse du continu ($c = \aleph_1$), on obtient le résultat suivant:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une fonction d'une variable réelle $f(x)$ qui est discontinue sur tout ensemble non dénombrable.
