Sur un corps non dénombrable de nombres réels.

Rédigé d'après un mémoire posthume de

Michel Souslin (Moscou)

par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Le but de cette note est de définir un corps non dénombrable de nombres réels n'en contenant pas la totalité [1]).

1. Pour arriver à ce but nous allons construire un ensemble parfait P_1 et une suite infinie $P_2, P_3, \dots P_n, \dots$ telle que $P_n = P_{n-1} +$

[1]) Ce problème a été publié par M. Mazurkiewicz dans *Fund. Math. 1*, 1920 (problème N° 8). Un problème plus simple, mais tout à fait analogue était résolu par M. Łomnicki dans un art. *Sur les fonctions multipériodiques uniformes d'une variable réelle* (C. R. de la Soc. des Sciences de Varsovie 1918). Il y était question de nommer un ensemble non dénombrable de nombres réels contenant toutes les différences $x - y$ de ses éléments, mais distinct de l'ensemble de tous les nombres réels. En modifiant légèrement la démonstration de M. Łomnicki on prouve qu'un exemple d'un tel ensemble est fourni par le plus petit ensemble qui contient tous les „nombres de Liouville" (c'est à dire: les nombres de la forme $\frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \frac{\alpha_3}{10^{3!}} + \dots$) ainsi que toutes les différences de ses éléments. Cet exemple peut servir aussi pour construire une fonction périodique ayant un ensemble non dénombrable de périodes; car — comme le prouve M. Łomnicki — pour qu'un ensemble de nombres réels puisse être l'ensemble de périodes d'une fonction (de variable réelle) il faut et il suffit qu'il contienne toutes les différences de ses éléments. La fonction caractéristique d'un tel ensemble (c'est à dire, égale à 1 aux éléments de cet ensemble et égale à 0 ailleurs) admet cet ensemble comme l'ensemble de ses périodes. Ainsi, en particulier, la fonction caractéristique de l'ensemble S, défini dans cette note, a une infinité non dénombrable de périodes; celle de l'ensemble E de la formule (3) en a un ensemble non mesurable (au sens de Lebesgue).

+l'ensemble de tous les nombres $x-y$ et $\frac{x}{y}$, où x et y appartiennent à P_{n-1} et $|x| \geqq \frac{1}{n}$ et $|y| \geqq \frac{1}{n}$.

L'ensemble

$$S = P_1 + P_2 + \dots P_n + \dots$$

sera évidemment un corps non dénombrable. Pour qu'il ne contienne pas la totalité des nombres réels, il suffira de définir l'ensemble P_1 de telle façon que la mesure (au sens de Lebesgue) $m(S)$ de S soit finie.

2. Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux fonctions réelles continues pour toutes les valeurs non nulles des arguments [1]). Etant donnés un nombre $\delta > 0$ et deux intervalles (fermés) I_1 et I_2, nous désignerons par $f_\delta(I_1, I_2)$ l'ensemble des valeurs de la fonction $f(x, y)$ pour les arguments assujéttis aux conditions:

(1) $$|x| \geqq \delta,\ |y| \geqq \delta,\ x \text{ appartient à } I_1 \text{ et } y \text{ à } I_2.$$

Soit $\bar{I}$ la longueur de l'intervalle I. Lorsque $\bar{I}_1 \leqq \delta$ et $\bar{I}_2 \leqq \delta$ les x et y qui satisfont aux conditions (1) forment deux intervalles; la fonction $f(x, y)$ y étant continue, $f_\delta(I_1, I_2)$ est un intervalle. Cet intervalle peut d'ailleurs être vide ou se réduire à un seul point.

Les mêmes remarques concernent le symbole $g_\delta(I_1, I_2)$.

3. Soit $\eta > \delta > 0$. La fonction $f(x, y)$ étant uniformément continue pour les arguments appartenant aux intervalles $[-\eta, -\delta]$ et $[\delta, \eta]$, on peut trouver pour chaque $\varrho_1 > 0$ un ϱ_2 tel que les conditions

$$I_1 + I_2 \subset [-\eta, +\eta]\ ^{2)}, \quad \bar{I}_1 \leqq \varrho_2 \quad \text{et} \quad \bar{I}_2 \leqq \varrho_2$$

entraînent l'inégalité $\overline{f_\delta(I_1, I_2)} \leqq \varrho_1$.

4. Nous allons construire l'ensemble parfait P_1 en définissant son système déterminant. Autrement dit, nous allons faire

[1]) On pourrait se borner ici au cas où $f(x, y) = x - y$ et $g(x, y) = \frac{x}{y}$. Or, la solution donnée par Souslin — ne dépendant pas de ces hypothèses spéciales — se prête à des généralisations considérables.

[2]) Le symbole „$X \subset Y$" veut dire que l'ensemble X est contenu dans Y.

correspondre à chaque système $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ composé de chiffres 0 et 1 un intervalle $D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ de façon que

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} \supset D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n} \\ D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} 0} \times D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} 1} = 0. \end{array} \right.$$

Un nombre x sera dit élément de P_1, lorsqu'il existe une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ telle que chaque intervalle $D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ contient x.

Soit D l'intervalle $(0, 1)$. D'après **3**, il existe dans D deux intervalles disjoints D_0 et D_1 assujéttis à la condition suivante:

$$I_1, I_2, \ldots I_{10}$$

désignant la suite formée des intervalles D_0, D_1 et de tous les

$$f_{1/2}(D_i, D_j) \quad \text{et} \quad g_{1/2}(D_i, D_j),$$

où $i, j = 0$ ou 1, — on a

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \ldots \overline{I}_{10} \leqslant 1.$$

(Pour s'en convaincre on n'aurait qu'à poser dans le N° **3**: $\eta = 1$, $\delta = \frac{1}{2}$, $\varrho_1 = \frac{1}{10}$ et $\varrho_2 \leqslant \frac{1}{100}$). Les intervalles D_0 et D_1 peuvent être déterminés d'une façon e f f e c t i v e, car leurs bornes peuvents toujours être supposées rationnelles.

Procédons par induction. Supposons que, pour un $n \geqslant 2$ donné, les intervalles disjoints $D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$ soient définis pour tous les systèmes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ composés de 0 et 1. En nous appuyant sur **3**, nous pouvons définir une suite $\{D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}\}$ d'intervalles satisfaisant à (2) et telle que la condition suivante soit réalisée:

Si 1°: $D_1^0, D_2^0, \ldots D_{k_0}^0$ désigne la suite des intervalles $\{D_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}\}$ (donc $k_0 = 2^n$),

2°: pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $D_1^j . D_2^j, \ldots D_{k_j}^j$ désigne la suite de tous les intervalles

$$f_{\frac{1}{n+1}}(D_s^l, D_t^r) \quad \text{et} \quad g_{\frac{1}{n+1}}(D_s^l, D_t^r),$$

où

$$l \leqslant j-1, \; r \leqslant j-1, \; s \leqslant k_l, \; t \leqslant k_r,$$

3°: $d_n = \sum\limits_{\substack{j=0,1,\ldots n \\ i=1,2,\ldots k_j}} \overline{D}_i^j$,

dans ces hypothèses on a $d_n \leqslant 1$:

Les intervalles $D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ étant ainsi définis pour tous les n naturels, l'ensemble parfait P_1 se trouve défini de même.

5. Soit $f(x, y) = x - y$ et $g(x, y) = \frac{x}{y}$. On voit aussitôt que

$$P_1 \subset D, \; P_2 \subset \sum_{i=1}^{10} I_i$$

et qu'en général

$$P_{n+1} \subset \sum_{\substack{j=0,1,\dots n \\ i=1,2,\dots k_j}} D_i^j.$$

On a donc pour la mesure $m(P_{n+1})$ l'inégalité

$$m(P_{n+1}) \leqslant d_n \leqslant 1$$

et, comme par définition

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots P_n \subset \dots,$$

on en conclut que

$$m(S) = \lim_{n=\infty} d_n \leqslant 1.$$

L'ensemble S répond donc au problème[1]).

Remarque sur la mesurabilité des corps numériques.

Dans un article *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive* M. Steinhaus a prouvé[2]) que, si A est un ensemble de nombres réels de mesure intérieure $\neq 0$ et D est l'ensemble de toutes les différences $x - y$ où x et y appartiennent à A, alors D contient un intervalle tout entier. On en conclut aussitôt que, si un corps de nombres réels ne contient pas la totalité de ces nombres, sa mesure intérieure est 0. Le problème s'impose: existe-il un corps ne contenant pas la totalité des nombres réels et ayant la mesure extérieure $\neq 0$[3])? ou, ce qui revient au même: *existe-il un corps non mesurable de nombres réels?*

Evidemment, ni l'ensemble S de Souslin (qui est une somme d'une suite

[1]) On pourrait démontrer que la construction de l'ensemble S décrite tout à l'heure est réalisée, lorsqu'on pose, en particulier:

$$\overline{D}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} = n^{-n^n}.$$

[2]) *Fund. Math. 1*, p. 100, corollaire.

[3]) La mesure intérieure ne peut être remplacée dans l'énoncé de M. Steinhaus par la mesure extérieure. Ceci résulte de l'existence d'un ensemble non mesurable contenant toutes les différences de ses éléments. L'existence d'un tel ensemble a été démontrée par M. Łomnicki (l. c. p. 833) à l'aide de la „base de Hamel". Au même but pourrait servir d'ailleurs l'ensemble E de la formule (3) de cette note.

d'ensembles fermés) ni les corps dénombrables ne répondent à ce problème. L'existence d'un corps non mesurable, qui va être établie à présent, résulte de l'axiome du choix de Zermelo[1]). Chaque ensemble de mesure intérieure $\neq 0$ contenant un ensemble parfait, il suffira pour notre but de prouver l'existence d'un corps qui ait des éléments communs avec chaque ensemble parfait et cependant ne contienne pas un nombre irrationnel a donné d'avance (d'ailleurs, tout à fait arbitraire).

Désignons, pour un ensemble quelconque A de nombres réels, par $C(A)$ le plus petit corps contenant A et envisageons l'ensemble $R(A)$ de tous les nombres x tels que a appartient à $C(A+(x))-C(A)$. On voit aussitôt que a peut être mis sous la forme $a=\frac{w(x)}{u(x)}$, où $w(x)$ et $u(x)$ sont deux polynomes à coéfficients appartenant à $C(A)$. Chaque x est donc une racine d'une équation à coefficients appartenant à $C(A+(a))$. Par conséquent, si l'ensemble A est infini, on a $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{R(A)}}$ ($\overline{\overline{X}}$ désignant, en général, la puissance de X).

Ceci établi, considérons la suite transfinie de tous les ensembles parfaits linéaires

$$B_0, B_1, \dots B_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega_\mathfrak{c}),$$

$\Omega_\mathfrak{c}$ désignant le plus petit nombre ordinal de la puissance du continu.

Posons 1°: $A_0 =$ l'ensemble des nombres rationnels; 2°: $A_{\alpha+1} = A_\alpha + (p_\alpha)$, où p_α est un élément quelconque de B_α tel que a n'appartient pas à $C(A_\alpha + (p_\alpha))$; 3°: lorsque α est un nombre limite, $A_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} A_\xi$.

Les p_α existent pour $0 < \alpha < \Omega_\mathfrak{c}$, car si R_α est l'ensemble de tous les x tels que a appartient à $C(A_\alpha + (x)) - C(A_\alpha)$, on a — comme nous l'avons dit —

$$\overline{\overline{R}}_\alpha \leqslant \overline{\overline{A}}_\alpha < \overline{\overline{B}}_\alpha,$$

puisque B_α a la puissance $\mathfrak{c}$ du continu. De plus $\overline{\overline{C(A_\alpha)}} < \mathfrak{c}$.

L'ensemble

$$E = \sum_{\alpha<\Omega_\mathfrak{c}} C(A_\alpha) \tag{3}$$

est le corps demandé, car il a des éléments communs avec chaque ensemble parfait B_α (à savoir: le point p_α) et, en outre, il ne contient pas le nombre a. Sa mesure extérieure est donc ∞, tandis que sa mesure intérieure est 0.

[1]) L'idée de cette démonstration est due à M. A. Zygmund.