Sur un continu singulier.

Par

Tadé Ważewski (Paris).

Je donne dans ce mémoire la solution de la question suivante: *C étant un continu borné, situé sur le plan $z=0$ de l'espace cartésien, est-il possible de construire un continu borné à trois dimensions dont les sections par un plan mobile parallèle au plan $z=0$ se projettent orthogonalement sur ce plan suivant un continu variable C' se changeant d'une façon continue avec la position du plan sécant et parcourant tous les sous-continus ou tous les sous-ensembles fermés de C?*

La continuité est définie ainsi:

$$\lim K_\nu = K$$

exprime que K est à la fois ensemble-limite et ensemble d'accumulation [1]) de la suite K_ν.

En considérant les ensembles fermés en question comme éléments d'un espace métrique convenablement défini, je rattache la solution du problème à un théorème de M. Mazurkiewicz [2]).

Pour que la réponse soit affivmative, il faut et il suffit que C soit une courbe de Jordan.

§ 1.

Voilà les notations que nous adoptons dans la suite, à quelques exceptions près. Nous désignons par

[1]) Comp. 18.

[2]) *Fund. Math.* T. I. p. 191. Voire aussi ce mémoire 35. Le théorème est juste pour un espace métrique E compact et séparable.

les miniscules — les points,
les majuscules — les ensembles de points,
les italiques — les classes d'ensembles,
les lettres grecques — les nombres,
$\equiv$ — l'équivalence,
ε — l'inclusion d'un élément à la classe,
$\sum_{c}$ — la somme d'ensembles satisfaisant à la condition c,
$\mathrm{Cl}(\mathcal{A})$ — la classe de points faisant partie des ensembles contenus dans $\mathcal{A}$,
(a) — l'ensemble dont l'élément unique est a,
$\subset$ — l'inclusion d'une classe à une autre,
$\cdot \supset \cdot$ — la relation de résulter.

§ 2.

1. Rappelons la définition de la classe métrique E de M. Fréchet[1]). On nomme ainsi la classe pour les éléments de laquelle est définie une fonction $\varrho(a, b)$ aux propriétés suivantes:

(1) $$\varrho(a, b) \geqslant 0,$$

(2) $$a = b \cdot \supset \cdot \varrho(a, b) = 0,$$

(3) $$\varrho(a, b) = 0 \cdot \supset \cdot a = b,$$

(4) $$\varrho(a, b) = \varrho(b, a),$$

(5) $$\varrho(a, b) + \varrho(b, c) \geqslant \varrho(a, c).$$

Remarque. Pour distinguer des classes différentes en question, nous les désignerons par $E(\varrho)$, $E(\varrho_1)$, etc. De même afin d'indiquer l'espace dont il s'agit, nous dirons quelquefois: ensemble fermé ϱ, continu ϱ_1, ligne de Jordan ϱ^*.

§ 3.

Rappelons la définition de classe *compacte*, *séparable* et quelques propriétés et définitions qui s'y rattachent.

2. Une classe métrique E est dite

a) *compacte*, si pour toute suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ existe une suite choisie dans la première, pour laquelle $\lim\limits_{\nu/\infty} \varrho(a_\nu, a) = 0$, a étant un élément de la classe.

[1]) M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendic. Palermo*, T. XXII, 1906.

β) *séparable*, s'il existe une suite infinie d'éléments $a_1, a_2, \ldots$, elle que tout élément a de la classe est un point limite d'une suite, choisie $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ c. à. d. $\lim\limits_{\nu/\infty} \varrho(a_{\alpha_\nu}, a) = 0$.

3. $\varrho(a, B)$ désigne la borne inférieure des nombres $\varrho(a, b)$ $(b \varepsilon B)$. $\varrho(A, B)$ — borne inférieure de $\varrho(a, b)$ $(a \varepsilon A, b \varepsilon B)$. Ces bornes existent pour les ensembles non vides. On a $\varrho(a, b) = \varrho((a), b) = \varrho((a), (b))$,

4. $\varrho(A, b) + \varrho(b, C) \leqslant \varrho(A, C)$ [1],

5. $A \subset B \cdot \supset \cdot \varrho(B, C) \leqslant \varrho(A, C)$,

6. borne supérieure de $\varrho(a, B)$ pour $a \varepsilon A$ existe et est finie.

7. On appelle *diamètre* de A la borne supérieure de $\varrho(a, b)$ pour $a \varepsilon A$, $b \varepsilon A$. On le désigne par $\tau(A)$.

8. $\tau(A) \leqslant \tau(A+B) \leqslant \tau(A) + \tau(B)$.

9. A est fermé ou $A = \overline{A}$ exprime:

$$a_\nu \varepsilon A, \ \lim \varrho(a_\nu, a) = 0 \cdot \supset \cdot a \varepsilon A$$

10. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

11. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$

12. $A = \overline{A}$, $B = \overline{B} \cdot \supset \cdot A + B = \overline{A + B}$.

13. $A = \overline{A} \cdot \supset \cdot a \varepsilon A$ équivaut à $\varrho(a, A) = 0$.

14. $\varrho(A, B) = \varrho(A, \overline{B})$.

15. $a \varepsilon (\overline{A} - A) \cdot \supset \cdot$ existe une suite $a_\nu \varepsilon A$ pour laquelle $\lim \varrho(a_\nu, a) = 0$.

16. $A \times B \neq 0$, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B} \cdot \equiv \cdot \varrho(A, B) = 0$, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$.

17. α) On dit que M est ensemble d'accumulation de la suite $A_1, A_2, \ldots$, s'il est composé de tous les points a pour lesquels

$$\lim \varrho(a_{\alpha_\nu}, a) = 0$$
$$a_{\alpha_\nu} \varepsilon A_{\alpha_\nu}$$

$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots$ étant une suite choisie dans la suite $A_1, A_2, \ldots$

β) L s'appelle ensemble limite de la suite $A_1, A_2, \ldots$ s'il est composé de tous les points a pour lesquels

$$\lim \varrho(a_\nu, a) = 0,$$
$$a_\nu \varepsilon A_\nu.$$

18. On ne change pas l'ensemble d'accumulation en supprimant un nombre fini d'éléments de la suite $A_1, A_2, \ldots$,

[1]) Cette proposition est due à M. Janiszewski.

19. $A_\nu \subset A = \bar{A} \cdot \supset \cdot$ ensemble d'accumulation de A_ν est contenu dans A.

20. Si $A_\nu \neq 0$, alors l'ensemble d'accumulation est non vide et fermé.

21. On appelle continu tout ensemble K non vide et fermé ayant la propriété α:

α) Si $a \varepsilon K$, $b \varepsilon K$, $\varepsilon > 0$ alors, il existe une suite $a_1, \ldots, a_n$ pour laquelle

$$a_1 = a, \quad a_n = b$$
$$\varrho(a_\nu, a_{\nu+1}) \leqslant \varepsilon \qquad (\nu/1, \ldots, n-1).$$

On obtient une définition équivalente en remplaçant α par la propriété β

β) Si $K = A + B$, $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$, $A \neq 0$ alors $B = 0$.

On peut sans changer la notion du continu fixer le point a dans la condition α.

22. Si $K \neq 0$, $K = \bar{K}$ et si toute couple de points de K se laisse lier par un sous-continu de K, K est continu.

La proposition subsiste si un de points du couple est fixé.

23. Si A est continu et pour tout $B \varepsilon \mathfrak{B}$ on a $B \times A \neq 0$, alors $\overline{A + \sum\limits_{B \varepsilon \mathfrak{B}} B}$ est continu.

24. La classe composée d'un seul point est un continu

25. On appelle sphère du centre a et du rayon $\delta > 0$ la classe de points b pour lesquels $\varrho(a, b) \leqslant \delta$.

Le point c est intérieur de la sphère, si

$$\varrho(a, c) < \delta.$$

Toute sphère forme un ensemble fermé.

26. Si tout point d'un ensemble fermé est intérieur d'une sphère appartenant à la classe $\mathcal{S}$ de sphères, il existe une classe finie choisie dans $\mathcal{S}$ jouissant de la même proriété [1]).

27. On appelle *ligne de Jordan* la classe composée de toutes les valeurs d'une fonction $J(\tau)$ définie dans l'intervalle $(0, 1)$ (les extrémités comprises) et continue, c'est-à-dire pour laquelle

$$\lim (\tau_\nu) = \tau$$

[1]) Fréchet l. c. Cette proposition y est énoncée sous des conditions un peu moins générales.

entraîne

$$\lim \varrho(J(\tau_\nu), J(\tau)) = 0.$$

28. Toute ligne de Jordan est un continu.

20. Soit $A^{(1)}$ un sous-ensemble non vide d'intervalle $(0, 1)$. Nous désignons par $J(A^{(1)})$ la classe de points a pour lesquels

$$a \varepsilon A^{(1)},$$
$$J(a) = a.$$

On a

$$J(A^{(1)}) + J(B^{(1)}) = J(A^{(1)} + B^{(1)}).$$

30. $J(\overline{A}^{(1)}) = \overline{J(A^{(1)})}$.

31. Si $A^{(1)} = \overline{A}^{(1)}$, $J(A^{(1)}) = \overline{J(A^{(1)})}$.

32. Si $I^{(1)}$ est un sous-intervalle de $(0, 1)$, $J(I^{(1)})$ est continu.

33. La fonction $J(\tau)$ représentant une ligne de Jordan est uniformément continue, c. à. d. à tout $\varepsilon > 0$ correspond und $\delta > 0$ tel que $|\tau' - \tau''| \leqslant \delta$ a pour conséquence $\varrho(J(\tau'), J(\tau'')) \leqslant \varepsilon$.

34. Les points d'un intervalle, d'un carré et d'un cube fermés forment trois classes compactes et séparables si l'on désigne par $\varrho(a, b)$ la distance de deux points.

35. Théorème de M. Mazurkiewicz.

La condition nécessaire et suffisante qu'un continu K soit une courbe de Jordan est qu'à tout point $a \varepsilon K$ et toute suite infinie $a_1, a_2, \ldots; a_\nu \varepsilon K$, $\lim \varrho(a_\nu, a) = 0$, il existe une suite de sous-continus de $K_1, K_2, \ldots$ pour laquelle

$$a \varepsilon K_\nu, \quad a_\nu \varepsilon K_\nu, \quad \lim \tau(K_\nu) = 0.$$

Cette condition peut s'énoncer aussi ainsi: Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$a \varepsilon K, \quad b \varepsilon K \quad \varrho(a, b) \leqslant \delta$$

entraîne l'existence d'un sous-continu L de K pour lequel

$$a \varepsilon L, \quad b \varepsilon L, \quad \tau(L) \leqslant \varepsilon.$$

§ 4 [1]).

I. Si $E(\varrho)$ est une classe métrique E de M. Fréchet compacte et séparable (2), alors la classe $E(\varrho^*)$ de tous ses sous ensembles,

[1]) A moins de mention contraire, nous désignons dans la suite par les majuscules les ensembles-éléments de $E(\varrho^*)$.

tels que $A \neq 0$, $A = \bar{A}$, devient une classe métrique E, si l'on définit

(1) $$\varrho^*(A, B)$$

comme le plus grand de nombres

$$\overline{borne}\, \varrho(a, B) \qquad (a \varepsilon \mathfrak{A})$$

$$\overline{borne}\, \varrho(A, b) \qquad (b \varepsilon \mathfrak{B})$$

Dém. D'abord (1) est un nombre réel et non négatif, car ϱ l'est et les deux bornes sont finies (6).

Nous omettons la preuve facile de propriétés (2) et (4) de **1**. Pour démontrer la propriété (3) de **1** supposons

$$\varrho^*(A, B) = 0.$$

En vertu de la définition de ϱ^*

(2) $$B = \bar{B},$$

(3) $$\varrho(a, B) = 0$$

pour tout $a \varepsilon \mathfrak{A}$.

Mais (2) et (3) donnent (13)

$$a \varepsilon B,$$

donc

$$A \subset B,$$

d'où, en raison de symétrie:

$$B \subset A,$$

par conséquent

$$A = B.$$

Il reste à démontrer la propriété (5) de **1**, c. à. d.

(4) $$\varrho^*(A, B) + \varrho^*(B, C) \geqslant \varrho^*(A, C).$$

En raison de symétrie, il suffit examiner le cas

$$\varrho^*(A, C) = \overline{borne}\, \varrho(a, C)$$

la $\overline{\text{borne}}$ étant calculée pour a variable dans A.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $a_1 \varepsilon A$ tel que

(6) $$\overline{borne}\, \varrho(a, C) - \varepsilon \leqslant \varrho(a_1, C).$$

Suivant la définition de $\varrho(a_1, B)$, (3), il existe un $b_1 \varepsilon B$ tel que

(7) $$\varrho(a_1, b_1) - \varepsilon \leqslant \varrho(a_1, B).$$

En outre (4)

$$\varrho(a_1, b_1) + \varrho(b_1, C) \geqslant \varrho(a_1, C),$$

donc (5), (6), (7)

$$\varrho(a_1, B) + \varrho(b_1, C) \geqslant \varrho^*(A, C) - 2\varepsilon$$

et, à fortiori:

$$\overline{borne}\ \varrho(a, B) + \overline{borne}\ \varrho(b, C) \geqslant \varrho^*(A, C) - 2\varepsilon$$

d'où (définition de ϱ^*):

$$\varrho^*(A, B) + \varrho^*(B, C) \geqslant \varrho^*(A, C) - 2\varepsilon.$$

ε étant arbitraire, la dernière égalité entraîne (4).

Voilà quelques conséquences immédiates de la définition de $E(\varrho^*)$:

II. Si $a \varepsilon E(\varrho)$, alors $(a) \varepsilon E(\varrho^*)$, $\varrho(a, b) = \varrho^*((a), (b))$.

III. Si $a \varepsilon A$, alors $\varrho(a, B) \leqslant \varrho^*(A, B)$.

IV. $A \subset B \subset C$ entraîne $\varrho^*(A, B) \leqslant \varrho^*(A, C)$.

V. $\varrho^*(A, B) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, $a \varepsilon A$, alors il existe un $b \varepsilon B$ tel que $\varrho(a, b) \leqslant 2\varepsilon$.

VI. Si $a_1 \varepsilon A_1$, $\varrho^*(A_\nu, A_{\nu+1}) \leqslant \varepsilon_\nu$ pour $\nu/1 \ldots n-1$ alors il existe une suite $a_2, \ldots, a_n$; $a_\nu \varepsilon A_\nu$; $\varrho(a_\nu, a_{\nu+1}) \leqslant 2\varepsilon_\nu$, $(\nu/1, \ldots, n-1)$.

VII. La proposition précédente subsiste, si l'on remplace n par ∞.

VIII. De V résulte:

Si $\lim \varrho^*(A_\nu, A) = 0$, (1)

et $a \varepsilon A$, alors il existe une suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ satisfaisant aux relations

$$a_\nu \varepsilon A_\nu, \ \lim \varrho(a_\nu, a) = 0.$$

Remarque. On peut exprimer cette proposition autrement: A satisfaisant à (1) est ensemble limite ou en fait partie (17 β), Il est facile de démontrer que A en question est ensemble limite de la suite $A_1, A_2, \ldots$ Soil l un élément quelconque de l'ensemble limite. Donc (17 β), il existe une suite $b_1, b_2, \ldots,$ tel que

$$b_\nu \varepsilon A_\nu$$

et

$$\lim \varrho(l, b_\nu) = 0;$$

d'autre part à b_ν correspond c_ν (V) tel que

$$c_\nu \varepsilon A \ \text{ et } \ \varrho(b_\nu, c_\nu) \leqslant 2\varrho^*(A_\nu, A),$$

donc

$$\lim \varrho(b_\nu, c_\nu) = 0.$$

En ajoutant deux limites précédentes, on obtient

$$\lim \varrho(l, c_\nu) = 0.$$

Mais (3)

$$\varrho(l, A) \leqslant \varrho(l, c_\nu),$$

donc

$$\varrho(l, A) = 0$$

et comme A est fermé (13):

$$l \varepsilon A.$$

A est donc l'ensemble limite de la suite $A_1, A_2, \ldots$

IX. Si $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$ entraîne

$$\varrho(a, B) \leqslant \delta, \quad \varrho(A, b) \leqslant \delta,$$

alors

$$\varrho^*(A, B) \leqslant \delta.$$

X. Si $(a) \varepsilon \mathfrak{A}$, $\tau^*(\mathfrak{A}) \leqslant \varepsilon$, alors $\tau(Cl(\mathfrak{A})) \leqslant 2\varepsilon$.

Dém. Il suffit de démontrer que

(1) $$b \varepsilon Cl(\mathfrak{A}), \quad c \varepsilon Cl(\mathfrak{A})$$

entraîne

$$\varrho(b, c) \leqslant 2\varepsilon.$$

Suivant (1) il existent B et C, tels que

$$B \varepsilon \mathfrak{A}, \quad C \varepsilon \mathfrak{A},$$

(2) $$b \varepsilon B, \quad c \varepsilon C$$

On a donc, d'après l'hypothèse de la proposition

$$\varrho^*((a), B) \leqslant \varepsilon, \quad \varrho^*((a), C) \leqslant \varepsilon,$$

par conséquent à fortiori (2), (III)

$$\varrho((a), b) \leqslant \varepsilon, \quad \varrho((a), c) \leqslant \varepsilon,$$

d'où (3), (1)

$$\varrho(b, c) \leqslant 2\varepsilon.$$

XI. Si $\mathfrak{A}$ est une classe d'ensembles A tels que

(1) $$\tau(A) \leqslant \delta$$

(2) $$A \times B \neq 0$$

alors

(3) $$\varrho^*(B, \overline{B + \sum_{A \varepsilon \mathfrak{A}} A}) \leqslant \delta.$$

Dém. $\overline{\Sigma A} \varepsilon E(\varrho^*)$, car le premier terme est non vide (2) et fermé (**10**).

Soit

(4) $$a \varepsilon \overline{\Sigma A + B}.$$

Deux cas sont possibles

(5) $$a \varepsilon (\Sigma A + B)$$

(6) $$a \varepsilon [\overline{\Sigma A + B} - (\Sigma A + B)].$$

Dans le premier cas ou $a \varepsilon B$, alors (**13**) $\varrho(B, a) = 0 \leqslant \delta$, ou bien a est contenu dans un certain A, p. ex. A_1

(7) $$a \varepsilon A_1$$

Il existe (2) un b pour lesquel

(8) $$b \varepsilon B$$

(9) $$b \varepsilon A_1.$$

De (7), (9), (1) résulte

$$\varrho(a, b) \leqslant \delta$$

donc

(10) $$\varrho(B, a) \leqslant \delta.$$

Par conséquent (4) dans le cas (5) entraîne (10). Cela subsiste aussi dans le cas (6). Il existe alors, en effet, suivant **15**, une suite $a_1, a_2, \ldots$ pour laquelle

$$a_\nu \varepsilon (\Sigma A + B),$$

$$\lim \varrho(a_\nu, a) = 0.$$

Suivant le cas précédent

$$\varrho(a_\nu, B) \leqslant \delta$$

donc

$$\varrho(a, a_\nu) + \varrho(a_\nu, B) \leqslant \delta + \varrho(a, a_\nu)$$

et d'aprés **4**

$$\varrho(a, B) \leqslant \delta + \varrho(a, a_\nu).$$

A la limite

$$\varrho(a, B) \leqslant \delta;$$

(4) entraîne donc (10).

D'autre part, pour tout $b \varepsilon B$ on a (**13**)

(11) $$\varrho(b, \overline{\Sigma A + B}) \leqslant \delta.$$

Rapprochant (10) et (11), on obtient (I)

$$\varrho^*(\overline{\Sigma A + B}, B) \leqslant \delta \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $B \subset \Sigma A$, l'inégalité (3) prend la forme

$$\varrho^*(B, \overline{\Sigma A}) \leqslant \delta.$$

XII. Si

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho^*(A_\nu, A) = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ est une suite croissante de nombres naturels,

(2) $$a_{\alpha_\nu} \varepsilon A_{\alpha_\nu} \quad (\nu/1, \ldots, \infty),$$
$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(a_{\alpha_\nu}, a) = 0$$

alors

$$a \varepsilon A.$$

Dém. Suivant III et **3**

$$0 \leqslant \varrho(a_{\alpha_\nu}, A) \leqslant \varrho^*(A_{\alpha_\nu}, A)$$

donc

(3) $$\lim\, (a_{\alpha_\nu}, A) = 0.$$

D'après **4**

$$0 \leqslant \varrho(a, A) \leqslant \varrho(a, a_{\alpha_\nu}) + \varrho(a_{\alpha_\nu}, A),$$

donc à la limite

$$\varrho(a, A) = 0$$

et en vertu de **13**

$$a \varepsilon A.$$

Remarque. La proposition précédente exprime que A est contenu dans l'ensemble d'accumulation de la suite $A_1, A_2, \ldots$ si (1) à lieu (Cf. **17**).

Nous allons démontrer que (1) *étant vérifié, A est l'ensemble d'accumulation M de la suite $A_1, A_2, \ldots$* Pour cela il suffit de prouver que tout point de M fait partie de A. Soit

$$m \varepsilon M.$$

Suivant **17** il existe une suite $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ satisfaisant à (2) pour laquelle

$$\lim \varrho(a_{\alpha_\nu}, m) = 0.$$

De là et de (3) on a, d'après **4**:

$$\varrho(m, A) = 0$$

donc (**13**)

$$m \varepsilon A.$$

Remarque II. La remarque précédente et celle de VIII donnent le résultat:

Si $\lim \varrho^*(A_\nu, A) = 0$ alors A est à la fois ensemble limite et ensemble d'accumulation de la suite $A_1, A_2, \dots$

XIII, Si l'ensemble d'accumulation et l'ensemble limite de la suite $A_1, A_2, \dots$ (A_ν fermé et non vide) sont identiques à un ensemble A, on a

$$\lim \varrho^*(A_\nu, A) = 0.$$

Démonstration. Suivant (I) il suffit de prouver que

(1) $$\lim_{\nu/\infty} \overline{borne}\, (a_\nu, A) = 0$$

(2) $$\lim_{\nu/\infty} \overline{borne}\, (A_\nu, a^\nu) = 0$$

où a_ν parcourt tous les points de A_ν et a^ν ceux de A.

Supposont que (1) soit inéxact. Il existe donc une suite

(3) $$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots$$

(4) $$a_{\alpha_\nu} \varepsilon A_{\alpha_\nu}$$

et un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tels que

(5) $$\varrho(a_{\alpha_\nu}, A) \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad (\nu/1 \dots \infty.)$$

Comme l'espace $E(\varrho)$ est compact, il existe une suite $a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, \dots$ choisie dans (3) pour laquelle

(6) $$\lim \varrho(a_{\beta_\nu}, b) = 0.$$

Suivant (4) et (5)

(7) $$\varrho(a_{\beta_\nu}, A) > 0$$

$$a_{\beta_\nu} \varepsilon A_{\beta_\nu}.$$

De (6) d'après la définition d'ensemble d'accumulation résulte

$$b \varepsilon A,$$

donc **20**, **13**

$$\varrho(b, A) = 0.$$

De là et de (6), suivant **4**:

$$\varrho(a_{\beta_\nu}, A) = 0,$$

contrairement à (7).

Supposons que (2) ne soit pas exact. Il existe donc une suite

$$a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \dots$$

(8) $$a^{\alpha_\nu} \varepsilon A$$

et un nombre $\varepsilon_1 > 0$, tels que

(9) $$\varrho(A_\nu, a^{\alpha_\nu}) \geqslant \varepsilon_1 > 0.$$

Comme $E(\varrho)$ est compact, il existe une suite choisie dans la précédente

$$a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \dots,$$

pour laquelle

(10) $$\varrho(a^{\beta_\nu}, c) = 0.$$

Suivant (8) et (9)

$$a^{\beta_\nu} \varepsilon A$$

(11) $$\varrho(A_{\beta_\nu}, a^{\beta_\nu}) \geqslant \varepsilon_1 > 0.$$

De (10), d'après **17**

$$c \varepsilon A.$$

Comme A est l'ensemble limite, il existe une suite $d_1, d_2, \dots$ telle que

$$d_\nu \varepsilon A, \quad \lim \varrho(d_\nu, c) = 0.$$

Par conséquent

$$d_{\beta_\nu} \varepsilon A_{\beta_\nu}, \quad \lim \varrho(d_{\beta_\nu}, c) = 0,$$

donc (3)

$$\lim \varrho(A_{\beta_\nu}, c) = 0$$

d'où en vertu de (10), (4)

$$\lim \varrho(a^{\beta_\nu}, A_{\beta_\nu}) = 0$$

contrairement à (11).

Remarque. Si $A_1, A_2, \dots$ est une suite infinie d'ensembles fermés et non vides, alors les propositions α et β suivantes sont équivalentes:

α) $\lim \varrho^*(A_\nu, A) = 0$.

β) A est a la fois ensemble limite et ensemble d'accumulation de la suite $A_1, A_2, \dots$

C'est la conséquence de la proposition précédente et de la remarque II de XII.

XIV. Définition. „Un ensemble A est bien distribué au degré $\varepsilon > 0$ sur la somme de sphères ΣS (25)" signifie [1]):

1) Les sphères de ΣS sont en nombre fini
2) $A \subset \Sigma S$
3) Pour chaque sphère S de ΣS

$$S \times A \neq 0$$
$$\tau(S) \leqslant \varepsilon.$$

XV. Si l'ensemble A fermé est bien distribué au degré ε sur la somme de sphères ΣS, alors

$$\varrho^*(A, \Sigma S) \leqslant \varepsilon.$$

Dém. On a (XIV) $A \neq 0$, $S \neq 0$. En outre (25, 12) $\Sigma S = \overline{\Sigma S}$. Appliquant XI, remarque, on obtient

$$\varrho^*(A, \overline{\Sigma S}) \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\varrho^*(A, \Sigma S) \leqslant \varepsilon.$$

XVI. Si tout ensemble de la suite $A_1, A_2, \ldots$ est bien distribué au degré $\varepsilon > 0$ sur ΣS, alors l'ensemble d'accumulation M de cette suite est aussi bien distribué au degré ε sur ΣS.

Dém. Il suffit évidemment démontrer pour M (non vide et fermé 20) la deuxième condition et la première partie de la troisième condition de XIV.

On a suivant l'hypothèse

(1) $$A_\nu \varepsilon \Sigma S$$

(2) $$S \times A_\nu \neq 0$$

pour tout A_ν et pour tout S en question.

D'autre part (19)

(3) $$M \subset \Sigma S.$$

Suivant (2), il existe une suite $a_1, a_2, \ldots$ pour laquelle

(4) $$a_\nu \varepsilon A_\nu$$
$$a_\nu \varepsilon S.$$

On en peut choisir (la classe $E(\varrho)$ est compacte) une suite a_{α_ν} et un a que

(5) $$\lim \varrho(a_{\alpha_\nu}, a) = 0.$$

[1]) Pour simplifier les notations, je désigne par ΣS la somme de sphères et la classe de sphères.

Comme S est fermé (25)

$$a \varepsilon S.$$

D'autre part (4), (5), (17)

$$a \varepsilon M$$

donc

(6) $$S \times M \neq 0$$

(3) et (6) expriment les propriétés qu'on se proposa de démontrer

XVII. Entourons tout point de $E(\varrho)$ d'une sphère de diamètre $\frac{1}{n}$, n étant un nombre naturel. Il existe (26) une classe finie de ces sphères, telles que chaque point de $E(\varrho)$ est intérieur d'une en au moins. Formons toutes les sommes possibles de ces sphères et nommons la classe de ces sommes S_n. La classe S_n est finie. Tout ensemble de $E(\varrho^*)$, c. à. d. tout ensemble non vide et fermé est évidemment bien distribué au degré $\varepsilon \geqslant \frac{1}{n}$ sur une de sommes-éléments de S_n (XIV).

Appelons $\mathfrak{A}$ l'ensemble $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Du raisonnement précédent résultent les conséquences:

1_0) A tout $\varepsilon > 0$ il existe une classe finie de sommes de sphères telle que tout ensemble A étant élément de $E(\varrho^*)$ est bien distribué au degré ε sur une d'elles.

2_0) Pour toute suite infinie $A_1, A_2, \ldots$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite infinie $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots$ choisie dans la précédente et une somme de sphères ΣS telle que tout élément de la suite A_{α_ν} est bien distribué sur la somme ΣS au degré ε.

C'est une conséquence de 1_0.

3_0) Il existe une classe dénombrable de sommes de sphères que, ε étant positif, tout ensemble A de $E(\varrho^*)$ est bien distribué sur une d'elles au degré ε.

C'est la classe $\mathfrak{A}$.

4_0) La classe $E(\varrho^*)$ est séparable.

Cela résulte de 3_0 et de XV (Cf. 2).

XVIII. Si

$$\lim_{\nu/\infty} \varepsilon_\nu = 0$$

$$\varepsilon_\nu > 0$$

alors pour toute suite $A_1, A_2, \ldots$, il existe une suite infinie $B_1, B_2, \ldots$ choisie dans la précédente, et une suite

$$(1) \qquad \Sigma^\nu S$$

de sommes de sphères, telle que pour tout μ naturel la propriété P_μ suivante subsiste:

Pour $\nu \leqslant \mu$ B_μ est bien distribué sur $\Sigma^\nu S$ au degré ε_ν.

La démonstration se fait par induction, si l'on tient compte de XVII, 20. Elle ne présente que des difficultés formelles. Nous nous bornons donc à indiquer la construction de la suite $B_1, B_2 \ldots$

Suivant XVII 20, il existe une suite $A^1_{\alpha_1}, A^1_{\alpha_2}, \ldots$ choisie dans la suite $A_1, A_2, \ldots$, telle que tout élément de la suite $A^1_{\alpha_1}, A^1_{\alpha_2}, \ldots$ est bien distribué au degré ε_1 sur une même somme de sphères $\Sigma^1 S$. Nous prenons $\Sigma^1 S$ comme premier élément de (1) et posons $B_1 = A^1_{\alpha_1}$.

Il existe pour la même raison une suite infinie $A^2_{\beta_1}, A^2_{\beta_2}, A^2_{\beta_3}, \ldots$ choisie dans la suite $A^1_{\alpha_2}, A^1_{\alpha_3}, \ldots$ telle que tout son élément est bien distribué au degré ε_2 sur une même somme de sphères $\Sigma^2 S$.

Nous prenons $\Sigma^2 S$ comme deuxième élément de (1) et posons $B_2 = A^2_{\alpha_2}$ etc.

XIX. Si

$$A_\nu \,\varepsilon\, E(\varrho) \qquad (\nu/1 \ldots \infty)$$

alors il existe une suite $A_{\alpha_1}, \ldots$ choisie dans la suite $A_1, A_2, \ldots$ ayant pour l'ensemble d'accumulation l'ensemble M et pour laquelle

$$(1) \qquad \lim_{\nu/\infty} \varrho^*(A_{\alpha_\nu}, M) = 0.$$

La démonstration s'appuit sur XVIII. Tout en tenant compte des notations de ce théorème, posons $A_{\alpha_\nu} = B_\nu$.

L'ensemble d'accumulation est aussi ensemble d'accumulation de la suite (18)

$$A_{\alpha_\nu}, A_{\alpha_{\nu+1}}, A_{\alpha_{\nu+2}}, \ldots$$

Or (XVIII) tous les éléments de cette suite sont bien distribués sur $\Sigma^\nu S$ au degré ε_ν, donc M l'est aussi (XVI).

On a par conséquent (XV)

$$\varrho^*(A_{\alpha_\nu}, \Sigma^\nu S) \leqslant \varepsilon_\nu$$

$$\varrho^*(M, \Sigma^\nu S) \leqslant \varepsilon_\nu$$

donc

$$0 \leqslant \varrho^*(A_{\alpha_\nu}, M) \leqslant \varrho^*(A_{\alpha_\nu}, \Sigma^\nu S) + \varrho^*(\Sigma^\nu S, M) \leqslant 2\varepsilon_\nu$$

et en passant à la limite, on obtient (1).

Remarque 1. On peut énoncer cette proposition ainsi: *La classe $E(\varrho^*)$ est compacte.*

Remarque 2. De la remarque précédente et de la remarque de XIII résulte:

Si tous les éléments de la suite $A_1, A_2, \ldots$ sont des ensembles non vides et fermés d'un espace fréchetien E compact et séparable, il existe une suite choisie dans la précédente dont l'ensemble limite coïncide avec l'ensemble d'accumulation. (L'hypothèse que A_ν sont fermés pourrait être levée facilement).

XX. En rapprochant XVII, 4_0 et XIX, on a.

$E(\varrho^*)$ est une classe séparable et compacte.

Nous y pourrons, par conséquent, appliquer les définitons et les théorèmes des § 2 et § 3.

XXI. Si

$$\lim \varrho^*(C_\nu, C) = 0 \tag{1}$$

et C_ν est continu, alors C l'est aussi[1]).

Il suffit de démontrer (**21**) que pour tout couple de points

$$c \,\varepsilon\, C, \quad c' \,\varepsilon\, C \tag{2}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite finie

$$c_1, \ldots, c_n$$

vérifiant les conditions

$$c_1 = c,$$

$$c_n = c',$$

$$\varrho(c_\nu, c_{\nu-1}) \leqslant \varepsilon, \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

$$c_\nu \,\varepsilon\, C.$$

Il existe (1) N pour lequel

$$\varrho^*(C_N, C) \leqslant \frac{\varepsilon}{5}.$$

[1]) Un théorème analogue se trouve dans la thèse de M. Janiszewski.

D'après (2) et (3) il existe (V) b et b' que

$$(4)\qquad \begin{gathered} b \,\varepsilon\, C_N \\ b' \,\varepsilon\, C_N \end{gathered}$$

$$(5)\qquad \begin{gathered} \varrho(c, b) \leqslant \frac{2\varepsilon}{5} \\ \varrho(c', b') \leqslant \frac{2\varepsilon}{5}. \end{gathered}$$

Mais C_N est continu: donc (4) il existe une suite finie

$$(6)\qquad b_1, \ldots, b_n$$

$$(7)\qquad b_1 = b,\ b_n = b'$$

$$(8)\qquad b_\nu \,\varepsilon\, C_N \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

$$(9)\qquad \varrho(b_\nu, b_{\nu+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{5}. \qquad (\nu/1, \ldots, n-1)$$

On peut supposer $n > 2$ en répétant au besoin un terme de la suite (6) plusieurs fois.

Suivant (8), (3), V existe une suite

$$(10)\qquad \left| \begin{array}{l} c_2, \ldots, c_{n-1} \\ c_\nu \,\varepsilon\, C \qquad (\nu = 2, \ldots, n-1) \\ \varrho(c_\nu, b_\nu) \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{5}. \end{array} \right.$$

On a pour $\nu/2, \ldots, n-2$

$$\varrho(c_\nu, c_{\nu+1}) \leqslant \varrho(c_\nu, b_\nu) + \varrho(b_\nu, b_{\nu+1}) + \varrho(b_{\nu+1}, c_{\nu+1}),$$

ce qui donne (10), (9)

$$(11)\qquad \varrho(c_\nu, c_{\nu+1}) \leqslant \varepsilon \quad (\nu/2, \ldots n-2).$$

Suivant (7), (5), (9), (10) on a

$$(12)\qquad \begin{aligned} \varrho(c, c_2) &\leqslant \varrho(c, b) + \varrho(b, b_2) + \varrho(b_2, c_2) = \\ &= \varrho(c, b) + \varrho(b_1, b_2) + \varrho(b_2, c_2) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

et d'une façon analogue

$$(13)\qquad \varrho(c_{n-1}, c') \leqslant \varepsilon.$$

En posant $c_1 = c$, $c_n = c'$, on reconnait, d'après (2), (10), (11), (12), (13), la suite $c_1, \ldots, c_n$ comme la suite à construire.

XXII. *Si A est fermé ϱ^* alors $Cl\,\mathfrak{A}$ est fermé ϱ.*

D é m. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie telle que

(1) $$a_\nu \,\varepsilon\, Cl\,\mathfrak{A}$$

(2) $$\lim\ \varrho(a_\nu, a) = 0$$

Il suffit de démontrer que $a \,\varepsilon\, Cl\, A$ c. à. d. qu'il existe A

(3) $$a \,\varepsilon\, A \,\varepsilon\, Cl\,\mathfrak{A}.$$

Suivant (1) il existe A_ν

(4) $$a_\nu \,\varepsilon\, A_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{A}.$$

Il existe donc (XIX) une suite choisie dans la suite $A_1, \ldots$ et un A que

(5) $$\lim\ \varrho^*(A_{a_\nu}, A) = 0$$

Comme A est fermé ϱ^* et d'après (4)

(6) $$A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$$

D'autre part, en conséquence de (2), (4), (5), XII

$$a \,\varepsilon\, A$$

ce qui joint à (6), donne (3).

XXIII. Si 1_0) *A est un continu ϱ^**

2_0) *existe un a tel que*

(1) $$(a) \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$$

alors $Cl\,\mathfrak{A}$ est un continu ϱ.

D é m. α) On a suivant la définition du continu (21) $\mathfrak{A} \neq 0$ par suite $Cl\,\mathfrak{A} \neq 0$.

β) De XXII et (21)

$$Cl\,\mathfrak{A} = \overline{Cl\,\mathfrak{A}}.$$

γ) Si $\varepsilon > 0$ et

(2) $$c \,\varepsilon\, Cl\,\mathfrak{A},$$

il existe une suite $a_1, \ldots, a_n$ telle que $a_1 = c$, $a_n = a$, $\varrho(a_\nu, a_{\nu+1}) \leqslant \varepsilon$

En effet, suivant (2) il existe C

$$c \,\varepsilon\, C \,\varepsilon\, \mathfrak{A}.$$

Suivant (1), (3) et 21 il existe une suite $A_1, A_2, \ldots A_n$ pour laquelle

(4) $$A_1 = C \quad A_n = (a)$$

(5) $$\varrho^*(A_\nu, A_{\nu+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\nu/1, \ldots, n-1)$$

(6) $$A_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{A}. \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

D'après (3), (5). VI il existe une suite

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

satisfaisant aux conditions

(8) $$a_\nu \,\varepsilon\, A_\nu \qquad (\nu/1, \ldots, n)$$

(9) $$a_1 = c$$

(10) $$\varrho(a_\nu, a_{\nu+1}) \leqslant \varepsilon. \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

De (8) et (6)

(11) $$a_\nu \,\varepsilon\, Cl\,\mathfrak{A}. \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

De (4) et (8)

$$a_n \,\varepsilon\, (a),$$

donc

(12) $$a_n = a.$$

(9), (12), (11), (10) expriment que la suite (7) est celle qu'on s'est proposée de construire.

XXIV. α) $\mathfrak{A}$ est une ligne ϱ^* de Jordan et que

β) $a \,\varepsilon\, Cl(\mathfrak{A})$ entraîne $(a) \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$

alors $Cl\,\mathfrak{A}$ est une ligne ϱ de Jordan.

Dém. Il suffit de prouver que la condition de M. Mazurkiewicz (35) est satisfaite pour $Cl\,\mathfrak{A}$.

ζ) $Cl\,\mathfrak{A}$ est un continu ϱ. (XXIII)

η) Soit $\varepsilon > 0$ et $b \,\varepsilon\, Cl(\mathfrak{A})$.

De là, d'après l'hypothèse β,

(1) $$(b) \,\varepsilon\, \mathfrak{A}.$$

ϑ) En raison de α et du théorème ϱ^* de M. Mazurkiewicz, il existe $\delta > 0$ que

$$\varrho^*((b), A) \leqslant \delta$$

entraîne l'existence d'un continu ϱ^*, $\mathcal{H}$

$$(b) \,\varepsilon\, \mathcal{H}$$

$$A \,\varepsilon\, \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} \subset \mathfrak{A}$$

$$\tau^*(\mathcal{H}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

ϰ) Supposons $\varrho(b, a) \leqslant \delta$

$$a \varepsilon Cl(\mathfrak{A})$$

donc

(2) $$(a) \varepsilon \mathfrak{A}.$$

Suivant (1), (2) et ϑ il existe un continu ϱ^*, $\mathscr{H}$

(3) $$(b) \varepsilon \mathscr{H}$$

(4) $$(c) \varepsilon \mathscr{H}$$

(5) $$\tau^*(\mathscr{H}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

(6) $$\mathscr{H} \subset \mathfrak{A}.$$

λ) $Cl(\mathscr{H})$ est un continu ϱ ((3), XXIII).

De (3), (4), (6) on a

$$b \varepsilon Cl(\mathscr{H}),\ a \varepsilon Cl(\mathscr{H}),\ Cl\mathscr{H} \subset Cl\mathfrak{A}.$$

D'après (3), (5) et X

$$\tau(Cl(\mathscr{H})) \leqslant \varepsilon$$

μ) ζ et λ et l'hypothèse η sous laquelle on a déduit λ montrent que la condition de M. Mazurkiewicz est satisfaite, Donc $Cl(\mathfrak{A})$ est bien une ligne ϱ de Jordan.

XXV. Désignons par $E(\varrho_2)$ un espace séparable et compact à 3 dimensions.

Si $\{J^{2*}(\tau)\}$ est une courbe ϱ_2^* de Jordan contenue dans l'espace $E(\varrho_2^*)$ et s'il existe un poit ζ', η' de $E(\varrho_2)$ tel que

(1) $$((\zeta', \eta')) = J^{2*}(\tau')$$

alors l'ensemble K comprenant tout les points ζ, η, τ de l'espace à 3 dimensions satisfaisant aux conditions

$$(\zeta, \eta) \varepsilon J^{2*}(\tau)$$
$$0 \leqslant \tau \leqslant 1$$

est un continu.

D é m o n s t r a t i o n. α) K n'est pas vide

β) K est fermé ϱ_3.

Supposons en effet

(2) $$\lim_{\nu/\infty} \varrho_3((\zeta_\nu, \eta_\nu, \tau_\nu), (\zeta_0, \eta_0, \tau_0)) = 0$$
$$(\zeta_\nu; \eta_\nu, \tau_\nu) \varepsilon K$$

c. à. d.

(3) $$(\zeta_\nu, \eta_\nu) \varepsilon J^{2*}(\tau_\nu).$$

Il suffit de démontrer (définition de K)

$$(\zeta_0, \eta_0) \varepsilon J^{2*}(\tau_0).$$

De (2)

$$\lim \varrho_1(\tau_\nu, \tau_0) = 0$$

(4) $$\lim \varrho_2((\zeta_\nu, \eta_\nu), (\zeta_0, \eta_0)) = 0$$

donc, comme $\{J^{2*}(\tau)\}$ est une ligne ϱ_2^* de Jordan:

(5) $$\lim \varrho_2^*(J^{2*}(\tau_\nu), J^{2*}(\tau_0)) = 0.$$

Par suite d'après (3) et III

$$\varrho_2((\zeta_\nu, \eta_\nu), J^{2*}(\tau_0)) \leqslant \varrho_2^*(y^{2*}(\tau_\nu), J^{2*}(\tau_0))$$

donc (5)

(6) $$\lim \varrho_2((\zeta_\nu, \eta_\nu), J^{2*}(\tau_0)).$$

Suivant **4**

$$\varrho_2((\zeta_\nu, \eta_\nu), (\zeta_0, \eta_0)) + \varrho_2((\zeta_\nu, \eta_\nu), J^{2*}(\tau_0)) \geqslant \varrho_2((\zeta_0, \eta_0), J^{2*}(\tau_0))$$

et à la limite (4), (6)

$$\varrho_2((\zeta_0, \eta_0), J^{2*}(\tau_0)) = 0.$$

Comme $J^{2*}(\tau_0)$ est fermé I, **13**

$$(\zeta_0, \eta_0) \varepsilon J^{2*}(\tau_0) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

γ) Soit ζ'', η'', τ'' un point de K, c. à. d

$$(\zeta'', \eta'') \varepsilon J^{2*}(\tau'').$$

Nous allons démontrer l'existence d'une suite $(\zeta_1, \eta_1, \tau_1), \ldots (\zeta_n, \eta_n, \tau_n)$ pour laquelle

$$(\zeta_1, \eta_1, \tau_1) = (\zeta'', \eta'', \tau'')$$
$$(\zeta_n, \eta_n, \tau_n) = (\zeta', \eta', \tau')$$
$$\varrho_3((\zeta_\nu, \eta_\nu, \tau_\nu), (\zeta_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}, \tau_{\nu+1})) \leqslant \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$
$$(\zeta_\nu, \eta_\nu, \tau_\nu) \varepsilon K$$

ou ζ', η', τ' est le point satisfaisant à (1).

En conséquence de la convergence uniforme de $J^{2*}(\tau)$ **33** il existe une suite $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$

(8) $$\tau_1 = \tau''$$

(9) $$\tau_n = \tau'$$

(10) $$\varrho_1(\tau_\nu, \tau_{\nu+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \nu/1,\ldots, n-1)$$

(11) $$\varrho_2^*(J^{2*}(\tau_\nu), J^{2*}(\tau_{\nu+1})) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (\nu/1,\ldots, n)$$

Il existe en vertu de (7), (11), VI une suite

$$(\zeta_1, \eta_1), (\zeta_2, \eta_2), \ldots, (\zeta_n, \eta_n)$$

telle que

(12) $$(\zeta_1, \eta_1) = (\zeta'', \eta'')$$

(13) $$(\zeta_\nu, \eta_\nu) \varepsilon J^{2*}(\tau_\nu) \qquad (\nu/1,\ldots, n)$$

(14) $$\varrho_2((\zeta_\nu, \eta_\nu), (\zeta_{\nu+1}, \eta_{\nu+1})) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (\nu/1,\ldots, n-1)$$

De (13) on a

(15) $$(\zeta_\nu, \eta_\nu, \tau_\nu) \varepsilon K. \qquad (\nu/1,\ldots, n)$$

De (12) et (8)

(16) $$(\zeta_1, \eta_1, \tau_1) = (\zeta'', \eta'', \tau'').$$

De (1), (9), (13)

$$(\zeta_n, \eta_n) \varepsilon J^{2*}(\tau_n) = J^{2*}(\tau') = ((\zeta', \eta'))$$

donc

$$(\zeta_n, \eta_n) = (\zeta', \eta')$$

d'où (9)

(17) $$(\zeta_n, \eta_n, \tau_n) = (\zeta', \eta', \tau').$$

D'autre part (10) et (14) donnent

$$\varrho_3((\zeta_\nu, \eta_\nu, \tau_\nu), (\zeta_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}, \tau_{\nu+1})) \leqslant \varepsilon, \qquad (\nu/1,\ldots, n-1)$$

ce qui avec (15), (16), (17) exprime l'existence de la suite à construire.

§ 5.

XXVI. Désignons par $E(\varrho_1)$ la classe $E(\varrho_1)$ composée de tous les points du segment (0, 1), les extrémités inclues. C'est une classe séparable et compacte. La classe de tous ses sous-ensembles fermés et non vides $E(\varrho_1^*)$ est donc aussi une telle classe (XX).

XXVII. Si $\{J(\tau)\}$ est une ligne ϱ de Jordan située dans un espace séparable et compact $E(\varrho)$, définie pour tout τ du segment (0, 1), alors à tout ensemble A

(1) $$A = \overline{A}$$

$$A \neq 0$$

(2) $$A \varepsilon \{J(\tau)\}$$

il existe un ensemble $T \varepsilon E(\varrho_1^*)$ pour lequel (**29**)

$$J(T) = A.$$

Démonstration. Il existe (2) un ensemble T' que

$$J(T') = A.$$

Donc (1), (**30**)

(3) $$J(\overline{T}') = \overline{A} = A$$

$$\overline{T}' \neq 0$$

(4) $$\overline{T}' \subset \text{seg}\,(0, 1).$$

De (4) il résulte en raison de **10** et XXVI

$$\overline{T}' \varepsilon E(\varrho_1^*)$$

ce qui avec (5) exprime le résultat cherché.

XXVIII. Si 1⁰ $\{J(\tau)\}$ est une ligne ϱ de Jordan définie pour tout $\tau \varepsilon E(\varrho_1)$ et contenue dans un espace séparable et compact $E(\varrho)$

2⁰ $J^{1*}(\sigma)$ est une ligne ϱ_1^* de Jordan définie pour tout $\sigma \varepsilon E(\varrho_1)$, alors la fonction

$$J(J^{1*}(\sigma))$$

définie pour les mêmes σ représente une ligne ϱ^* de Jordan.

Démonstration. Les fonctions $J(\sigma)$ et $J^*(\tau)$ sont uniformément continues (**33**).

Il correspond par conséquent à $\varepsilon > 0$ un $\delta_1 > 0$ tel que

$$\varrho_1(\tau, \tau') \leqslant \delta_1$$

entraîne

$$\varrho(J(\tau'), J(\tau)) \leqslant \varepsilon$$

et $\delta_2 > 0$ tel que de

$$\varrho_1(\sigma, \sigma') \leqslant \delta_2$$

résulte

(2) $$\varrho_1^*(J^{1*}(\sigma'), J^{1*}(\sigma)) \leqslant \frac{\delta_1}{2}.$$

Il suffit de démontrer (**27**) que (1) donne la conséquence

(3) $$\varrho^*[J(J^{1*}(\sigma'), J(J^{1*}(\sigma))] \leqslant \varepsilon.$$

Soit a un point quelconque pour lequel

(4) $$a \varepsilon J(J^{1*}(\sigma)).$$

Supposons (1) vérifié. (2) l'est aussi suivant l'hypothèse. Il existe τ_a

(5) $$a = J(\tau_a),$$

(6) $$\tau_a \varepsilon J^{1*}(\sigma).$$

Il existe ((6), (2), V) τ_b

(7) $$\tau_b \varepsilon J^{*}(\sigma'),$$

$$\varrho_1(\tau_b, \tau_a) \leqslant \delta_1$$

On a donc

$$\varrho(J(\tau_b), J(\tau_a)) \leqslant \varepsilon$$

c. à. d. (5)

(8) $$\varrho(J(\tau_b), a) \leqslant \varepsilon.$$

De (7) résulte:

(9) $$J(\tau_b) \varepsilon J(J^{1*}(\sigma')).$$

En posant

$$J(\tau_b) = b$$

on obtient (8), (9)

$$\varrho(b, a) \leqslant \varepsilon,$$

$$b \varepsilon J(J^{1*}(\sigma')),$$

donc à fortiori (5)

(10) $$\varrho(J(J^{1*}(\sigma')), a) \leqslant \varepsilon.$$

Cette relation a lieu pour tout a satisfaisant à (4).

On démontre d'une façon pareille que pour tout a'

$$a' \varepsilon J(J^{1*}(\sigma'))$$

on a

(11) $$\varrho_2(J(J^{*}(\sigma)), a') \leqslant \varepsilon$$

(10), (11) et III conduisent à la conclusion que (3) est vrai, c. q. f. d.

§ 6.

XXIX. **Définition.** Nous appellons $\mathcal{F}$ toute classe aux propriétés suivantes

1° $\mathcal{F} \neq 0$, $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}^*$ (c'est-à-dire $\mathcal{F}$ est fermé ϱ_1^*)

2° Si $C \varepsilon \mathcal{F}$

alors

$$C \neq 0, \; C = \overline{C}, \; C \subset E(\varrho_1)$$

3° Si $C \varepsilon \mathcal{F}$

et si pour tout intervalle I

$$I \subset E(\varrho_1)$$

de la classe $\mathcal{J}$ d'intervalles on a

$$C \times I \neq 0$$

alors

$$\overline{C + \Sigma I} \varepsilon \mathcal{F}.$$

4°) Si $a \varepsilon E(\varrho_1)$ alors $(a) \varepsilon \mathcal{F}$.

XXX. La classe $E(\varrho_1^*)$ est une classe $\mathcal{F}$ (I, XXVI, XXIX, **10**).

XXXI. $\mathcal{F} \subset E(\varrho_1^*)$

parce que $\mathcal{F}$ est composé d'ensembles non vides et fermés, contenus dans $E(\varrho_1)$ (I).

XXXII. Si

$$C_1 \varepsilon \mathcal{F}, \; C_2 \varepsilon \mathcal{F}, \; \varrho_1^*(C_1, C_2) \leqslant \alpha, \tag{1}$$

alors il existe une ligne ϱ_1^* de Jordan $\{J^{1*}(\tau)\}$ définie pour tout τ du segment (0, 1) pour laquelle

$$J^{1*}(0) = C_1, \; J^{1*}(1) = C_2, \tag{2}$$

$$J^{1*}(\tau) \varepsilon \mathcal{F} \tag{3}$$

$$\tau^{1*}(\{J^{1*}(\tau)\}) \leqslant 4\alpha. \tag{4}$$

Dém. Soit

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} \tag{5}$$

la classe de toutes les couples γ_1, γ_2 telles que

$$\gamma_1 \varepsilon C_1$$

$$\gamma_2 \varepsilon C_2$$

$$\varrho_1(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant 2\alpha. \tag{6}$$

D'après (1), V

$$\begin{aligned} \Sigma\gamma_1 &= C_1 \\ \Sigma\gamma_2 &= C_2 \end{aligned} \tag{7}$$

où $\Sigma\gamma_1$ (et analoguement $\Sigma\gamma_2$) est la somme étendue sur tous les γ_1 pour lesquels existe un couple (γ_1, γ_2) faisant partie de (5).

Considérons les deux fonctios

(8) $$J_1^{1*}(\tau) = \overline{\Sigma \operatorname{seg}(\gamma_1, \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau)}$$
$$J_2^{1*}(\tau) = \overline{\Sigma \operatorname{seg}(\gamma_2, \gamma_2 + (\gamma_1 - \gamma_2)\tau)}$$

définies pour tout τ du segment $(0, 1)$, où *seg* signifie le segment aux extrémités marquées entre parenthèses. Les sommes Σ sont étendues sur tous les couples en question.

Evidemment

(9) $$J_1^{1*}(1) = J_2^{1*}(1).$$

De (7), (8), et (1)

(10) $$J_1^{1*}(0) = C_1,\ J_2^{1*}(0) = C_2,$$

(11) $$J_1^{1*}(\tau) \subset E(\varrho_1) = \operatorname{seg}(0, 1)$$

(12) $$C_1 \subset J_1^{1*}(\tau) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

De là et de (8):

(13) $$J_1^{1*}(\tau) = C_1 + \overline{\Sigma \operatorname{seg}(\gamma_1 \cdot \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau)}.$$

Suivant (8) et **10** on a $J_1^{1*}(\tau) = \overline{J_1^{1*}}(\tau)$, $J_1^{1*}(\tau) \neq 0$, donc XXIX

(14) $$J_1^{1*}(\tau)\, \varepsilon\, \mathcal{F}.$$

Nous allons indiquer une borne supérieure pour $\varrho_1^*(J_1^{1*}(\tau'), J_1^{1*}(\tau''))$

En raison de symétrie on peut supposer

(15) $$0 \leqslant \tau' \leqslant \tau'' \leqslant 1.$$

Suivant (8), (15) et **11**

(16) $$J_1^{1*}(\tau'') = \overline{\Sigma \operatorname{seg}[\gamma_1, \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau'']} =$$
$$= \overline{\Sigma(\operatorname{seg}[\gamma_1, \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau'] + \operatorname{seg}[\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau', \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau''])} =$$
$$= \overline{J_1^{1*}(\tau) + \Sigma \operatorname{seg}[\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau', \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau'']}.$$

De (6)

(17) $$\tau_1(\operatorname{seg}[\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau', \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau'']) = |\tau'' - \tau'|\,|\gamma_2 - \gamma_1| =$$
$$|\tau'' - \tau'|\,|\varrho_1(\gamma_1, \gamma_2)| \leqslant |\tau'' - \tau'|\,.\,2\alpha.$$

De (13)

(18) $$\operatorname{seg}[\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau', \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau''] \times J_1^{1*}(\tau') \neq 0.$$

En outre γ_1 et γ_2 faisant partie du segment $(0, 1)$ et τ', τ'' étant positifs, on a d'après la définition de $E(\varrho_1)$ (XXVI)

(19) $$\operatorname{seg}[\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau', \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tau''] \subset E(\varrho_1).$$

Enfin, en raison de (11), (19), (16), (17), (18), on a (XI)

$$\varrho_1^*(J_1^{1*}(\tau'), J_1^{1*}(\tau'')\leqslant|\tau''-\tau'|\,2\alpha. \tag{20}$$

(20) exprime la continuité de $J_1^{1*}(\tau)$.

$\{J_1^{1*}(\tau)\}$ est donc une ligne ϱ_1^* de Jordan. Analoguement $\{J_2^{1*}(\tau)\}$ est une ligne ϱ_1^* de Jordan Elles ont un élément commun (9), donc

$$\{J_1^{1*}(\tau)\}+\{J_2^1(\tau)\}$$

est aussi une ligne ϱ_1^* de Jordan; la fonction qui la représente peut être définie:

$$J^{1*}(\tau)=J_1^{1*}(2\tau)\quad\text{pour}\quad \tau\,\varepsilon\,\mathrm{seg}\,(0,\tfrac{1}{2})$$

$$J^{1*}(\tau)=J_2^{1*}(2-2\tau)\quad\text{pour}\quad \tau\,\varepsilon\,\mathrm{seg}\,(\tfrac{1}{2},1).$$

Suivant (10) et (14) et une relation analogue à (14) pour $J_2^{1*}(\tau)$, (2) et (3) sont vérifiés.

Pour démontrer (4), remarquons que (20) donne

$$\varrho_1^*(J_1^{1*}(\tau), J_1^*(1))\leqslant|1-\tau|\,2\alpha\leqslant 2\alpha$$

et analoguement

$$\varrho_1^*(J_2^{1*}(\tau), J_2^{1*}(1))\leqslant 2\alpha$$

ce qui s'écrit suivant (9) et la définition de J^*

$$\varrho_1^*(J^{1*}(\tau), J^{1*}(\tfrac{1}{2}))\leqslant 2\alpha.\qquad (0\leqslant\tau\leqslant 1)$$

Pour τ_1 et τ_2 du segment (0, 1) on obtient de là

$$\varrho_1^*(J^{1*}(\tau_1), J^{1*}(\tau_2))\leqslant\varrho_1^*(J^{1*}(\tau), J^{1*}(\tfrac{1}{2}))+\varrho_1^*(J^{1*}(\tfrac{1}{2}), J^{1*}(\tau_2))\leqslant 4\alpha$$

donc (7) (4) est vérifié.

XXXIII, $\mathcal{F}$ est continu ϱ_1^*.

En effet $\mathcal{F}$ est non vide et fermé ϱ_1^* (XXIX). Chaque couple de ces éléments se laisse joindre par une ligne ϱ_1^* de Jordan (XXXII) (V. 22).

XXXIV. $\mathcal{F}$ est une ligne ϱ_1^* de Jordan.

En effet, en raison de XXXIII et XXXII $\mathcal{F}$ satisfait aux conditions du théorème de M. Mazurkiewicz (35).

XXXV. Si pour une ligne ϱ de Jordan $\{J(\tau)\}$

$$\varrho_1(\tau', \tau'')\leqslant\delta$$

entraîne

$$\varrho(J(\tau'), J(\tau''))\leqslant\varepsilon,$$

alors

(1) $$\varrho_1^*(T', T'') \leqslant \frac{\delta}{2}, \quad T' \varepsilon E(\varrho_1^*), \quad T'' \varepsilon E(\varrho_1^*)$$

entraîne

(2) $$\varrho(J(T'), J(T'')) \leqslant \varepsilon.$$

Dém. On a (I), (31), (10)

$$J(T') \varepsilon E(\varrho^*), \quad J(T'') \varepsilon E(\varrho^*).$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver la proposition Γ suivante:

Pour tout a

(3) $$a \varepsilon J(T')$$

il existe b

(4) $$b \varepsilon J(T'')$$

tel que

(5) $$\varrho(a, b) \leqslant \varepsilon.$$

(En effet (4) et (5) donnent (5) $\varrho(a, y(T'')) \leqslant \varepsilon$, donc (2) est vrai en raison de symétrie des rôles joués par T' et T'' et de IX).

Démonstrations. Γ. De (3) résulte l'existence de τ_a

(6) $$a = J(\tau_a)$$
$$\tau_a \varepsilon T'.$$

Il existe donc (1), V un τ_b

(7) $$\tau_b \varepsilon T''$$
$$\varrho(\tau_a, \tau_b) \leqslant \delta$$

par conséquent, suivant la prémisse du théorème:

$$\varrho(J(\tau_a), J(\tau_b)) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui donne, d'après (6):

$$\varrho(a, J(\tau_b)) \leqslant \varepsilon.$$

De (7) résulte:

$$J(\tau_b) \varepsilon J(T'').$$

Ces deux relations deviennent identiques à (5) et (4), si l'on pose

$$J(\tau_b) = b.$$

Γ est donc demontré.

XXVI. Si $\{J(\tau)\}$ est une ligne de Jordan située dans l'espace $E(\varrho)$ séparable et compact et définie pour tout τ

$$\tau \varepsilon E(\varrho_1),$$

si en outre

$$\lim \varrho_1^*(T_\nu, T) = 0,$$

alors

$$\lim \varrho^*(J(T_\nu), J(T)) = 0.$$

Cette proposition revient à la précédente, si l'on remarque qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ vérifiant la prémisse de cette proposition.

§ 7.

XXXVII. Soit $\{J(\tau)\}$ une ligne ϱ de Jordan située dans un espace compact et séparable $E(\varrho)$.

Nous appellons $\mathcal{F}_1$ la classe de tous les ensembles fermés T tels que $J(T)$ est un continu ϱ.

La ligne ϱ de Jordan de laquelle dépend $\mathcal{F}_1$, nous la supposons la même au cours de ce paragraphe.

XXXVIII. A chaque continu ϱ, $K \subset \{J(\tau)\}$ correspond un ensemble T,

$$T \varepsilon \mathcal{F}_1,$$
$$J(T) = K.$$

Cela résulte de XXVII, si l'on remarque que K est fermé.

XXXIX. $\mathcal{F}_1 \neq 0$.

Cela résulte de XXXVIII si l'on pose $K = \{J(\tau)\}$ qui est continu ϱ (28).

XL. $\mathcal{F}_1 \subset E(\varrho_1^*)$

comme composé d'ensembles fermés et non vides. (XXXVII, XXXIX, XXVI, I).

XLI. $\mathcal{F}_1$ est fermé ϱ_1^*.

Dém. Supposons

$$T_\nu \varepsilon \mathcal{F}_1 \tag{1}$$

$$\lim \varrho_1^*(T_\nu, T) = 0. \tag{2}$$

De (2)

$$T \varepsilon E(\varrho_1^*), \quad T_\nu \varepsilon E(\varrho_1^*) \tag{3}$$

donc (I)

$$T = \overline{T} \tag{4}$$

De (2) et (3) résulte suivant XXXVI

$$\lim \varrho^*(J(T_\nu), J(T)) = 0.$$

Or ((1), XXXVII) $J(T_\nu)$ est un continu ϱ, donc (XXI) $J(T)$ est aussi un continu, par conséquent (XXXVII, (4)) $T \varepsilon \mathcal{F}_1$ c. q. f. d.

XLII. Si $a \varepsilon E(\varrho_1)$ alors $(a) \varepsilon \mathcal{F}_1$.

C'est vrai (XXXVII) car l'ensemble composé d'un seul point est un continu (**24**).

XLIII. $\mathcal{F}_1$ est une classe $\mathcal{F}$.

Dém. $\mathcal{F}_1$ possède les propriétés 1_0, 2_0, 4_0, de $\mathcal{F}$ (XXIX) ce qui est exprimé par XXXIX, XLI, XXXVII, XLII.

Reste à démontrer la propriété 3_0 de XXIX.

Soit

$$C \varepsilon \mathcal{F}_1 \tag{1}$$

et soit pour tout intervalle I de la classe d'intervalles $\mathcal{J}$

$$C \times I \neq 0 \tag{2}$$
$$I \subset E(\varrho_1).$$

On a (**30**, **29**)

$$J(\overline{C + \Sigma I}) = \overline{J(C + \Sigma I)} = \overline{J(C) + \Sigma J(I)}. \tag{3}$$

Or $J(C)$ est un continu ((1), XXXVII). $J(I)$ l'est aussi (**32**).

Suivant (2)

$$J(I) \times J(C) \neq 0$$

donc (**23**) $\overline{J(C) + \Sigma J(I)}$ est un continu. $\overline{J(C + \Sigma I)}$ l'est aussi (3). Cela conduit XXXVII) à

$$\overline{C \times \Sigma I} \varepsilon \mathcal{F}_1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

XLIV. $\mathcal{F}_1$ est un ligne ϱ_1^* de Jordan.

C'est une conséquence de la proposition précédente et de XXXIV.

§ 8.

XLV. A toute ligne ϱ de Jordan $\{J(\tau)\}$, correspond une ligne ϱ^* de Jordan parcourant tous ses sous-ensembles non vides et fermés et une autre qui parcourt tous les sous-continus de $\{J(\tau)\}$.

C'est une conséquence immédiate de XXXIV, XLIV, XXVII, XXXVIII et XXVIII.

XLVI. La condition nécessaire et suffisante qu'un continu ϱ d'un espace fréchétien métrique compact et séparable $E(\varrho)$ soit une ligne ϱ de Jordan est chacune de suivantes:

α) La classe $\mathfrak{A}$ de tous les sous-ensembles fermés et non vides de K est une ligne ϱ^* de Jordan.

β) La classe $\mathfrak{B}$ de tous les sous-continus de K est une ligne ϱ^* de Jordan.

Démonstration. La nécessité est exprimée par XLV Reste la suffisance.

Supposons que $\mathfrak{A}$ soit une ligne ϱ^* de Jordan. (Le cas de $\mathfrak{B}$ se traite d'une façon analogue).

Il suffit de démontrer la condition ϱ de M. Mazurkiewicz (35).

Supposons

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(a_\nu, a) = 0$$

$$a_\nu \varepsilon K$$

$$a \varepsilon K.$$

Suivant la définition de $\mathfrak{A}$

$$(1) \qquad \begin{gathered} (a_\nu) \varepsilon \mathfrak{A} \\ (a) \varepsilon \mathfrak{A} \end{gathered}$$

et d'après II

$$\lim \varrho^*((a_\nu), (a)) = 0$$

$\mathfrak{A}$ étant un ligne ϱ^* de Jordan, il existe (35) une suite de continus ϱ_1^*

$$(2) \qquad \begin{gathered} (a) \varepsilon \mathcal{K}_\nu \\ (a_\nu) \varepsilon \mathcal{K}_\nu \\ \mathcal{K}_\nu \subset \mathfrak{A} \\ \lim \tau^*(\mathcal{K}_\nu) = 0. \end{gathered}$$

On a donc d'après X et (1)

$$\lim \tau(Cl(\mathcal{K}_\nu)) = 0.$$

Mais suivant XXIII et (2) $Cl\,\mathcal{K}_\nu$ et $Cl\,\mathcal{K}$ sont des continus ϱ et

$$a \varepsilon Cl(\mathcal{K}_\nu)$$

$$a_\nu \varepsilon Cl(\mathcal{K}_\nu)$$

$$Cl(\mathcal{K}_\nu) \subset Cl(\mathfrak{A}).$$

La condition ϱ de M. Mazurkiewicz est donc satisfaite pour $Cl(\mathfrak{C})$.

XLVII. *Pour que la question posée au commencement de ce mémoire admette la réponse affirmative, il faut et suffit que le continu C en question soit une courbe de Jordan (= courbe ϱ_2 de Jordan).*

Cela résulte immédiatement de **34**, XLVI, **24**, XXV et la remarque de XIII.