Sur la dérivabilité des fonctions monotones.

Par

A. Rajchman et S. Saks (Varsovie).

Le but de cette Note est de donner une démonstration simple et élémentaire au théorème de M. Lebesgue, d'après lequel toute fonction monotone est presque partout dérivable, et au théorème de M. Fubini, d'après lequel une série convergente de fonctions non décroissantes peut être presque partout différentiée terme à terme.

1. Lemme 1. Si $f(x)$ est une fonction non décroissante (continue ou non), l'ensemble E de points x où l'on a $\overline{f'_+}(x) = +\infty$, est de mesure nulle.

Démonstration. Il suffira évidemment de considérer la fonction $f(x)$ à l'intérieur d'un intervalle fini $d = (a, b)$.

Soit $\mu = m_e(E)$ la mesure extérieure (lebesguienne) de E, p — un nombre naturel donné quelconque, x — un point de E. D'après $\overline{f'_+}(x) = +\infty$ il existe un nombre $h_x > 0$, tel que $x + h_x < b$ et que

$$(1) \qquad \frac{f(x+h_x) - f(x)}{h_x} > p.$$

Tout point x de E est donc extrémité gauche de l'intervalle correspondant $\delta_x = (x, x+h_x)$. D'après le lemme métrique de M. Sierpiński [1]) il existe donc un nombre fini de ces intervalles

$$(2) \qquad \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_N}$$

correspondant aux points $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de E, n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que la mesure extérieure de l'ensemble

[1]) V. ce volume p. 201.

de ces points de E qui n'appartiennent à aucun des intervalles (2) est $< \mu/2$: donc la mesure extérieure de l'ensemble de points de E contenus dans les intervalles (2), et, à plus forte raison, la somme des longueurs de ces intervalles, est $> \mu/2$, c'est-à-dire

$$h_{x_1} + h_{x_2} + \ldots + h_{x_N} > \frac{\mu}{2}. \tag{3}$$

Les intervalles (2), tous contenus dans (a, b), n'empiètant pas les uns sur autres et la fonction $f(x)$ étant non décroissante, nous avons évidemment

$$f(b) - f(a) \geqslant \sum_{k=1}^{N} [f(x_k + h_{x_k}) - f(x_k)],$$

ce qui donne, d'après (1) et (3):

$$f(b) - f(a) \geqslant p \sum_{k=1}^{N} h_{x_k} > \frac{p\mu}{2},$$

donc:

$$\mu < \frac{2[f(b) - f(b)]}{p}.$$

Le nombre naturel p pouvant être quelconque, cela prouve que $\mu \leqslant 0$, donc que $m(E) = 0$, c. q. f. d.

2. Il importe de remarquer qu'on peut déduire sans peine de notre lemme, en utilisant un raisonnement de M. Banach [1]), le théorème que voici:

L'ensemble $E_0 = \mathrm{E}[f'_+(x) = +\infty]$ *est de mesure nulle pour toute fonction* $f(x)$ *d'une variable réelle* [2]).

Voici le raisonnement de M. Banach:

Pour tout point x de E_0 il existe évidemment un nombre positif h_x tel que pour tout nombre ξ intérieur à l'intervalle $(x, x+h_x)$ subsiste l'inégalité

$$f(\xi) > f(x). \tag{4}$$

Désignons par E_n l'ensemble de ces points x de E_0 pour lesquels il existe un nombre $h_x > 1/n$ tel que l'inégalité $x > \xi > x + h_x$ entraîne l'inégalité (4): nous aurons évidemment $E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots$

[1]) *C. R.* t. 163.

[2]) Cf. N. Lusin: *C R.* note du 17 juin 1912; G. C. Young *C. R.* note du 13 mars 1916.

Si chacun d'ensembles E_n avait la mesure nulle, notre théorème serait démontré. Admettons donc que l'ensemble E_k ne jouis se pas de cette propriété (c'est-à-dire a une mesure positive ou bien est non mesurable). Dans ce cas il existe évidemment un intervalle $\Delta = (a, b)$ de longueur $< 1/k$ et tel que l'ensemble ΔE_k (la portion de E_k contenue dans Δ) n'est pas de mesure nulle.

Soient x_1 et $x_2 > x_1$ deux points de l'ensembles ΔE_k. D'après la définition de l'ensemble E_k, l'intervalle Δ étant de longueur $< 1/k$, nous concluons que l'inégalité (4) subsiste pour $x = x_1$ et $\xi = x_2$, ce qui donne

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Il en résulte que la fonction $f(x)$ est croissante dans l'ensemble ΔE_k.

Définissons maintenant dans l'intervalle $\Delta = (a, b)$ la fonction $\varphi(x)$ comme borne supérieure de tous les nombres $f(\xi)$ où ξ sont des nombres de ΔE_k tels que $\xi \leqslant x$; $\varphi(x)$ sera évidemment une fonction non décroissante dans (a, b).

On voit sans peine que pour tout point x de l'ensemble ΔE_k qui est limite d'une suite décroissante de points de cet ensemble, nous avons $\overline{\varphi'_+}(x) = +\infty$ (puisque $f'_+(x) = +\infty$ et $\varphi(t) = f(t)$ dans ΔE_k). Il en résulte que l'ensemble ΔE_k, sauf peut être un nombre fini ou une infinité dénombrable de points (qui ne sont pas points d'accumulation de droite de ΔE_k) est contenu dans l'ensemble $\mathrm{E}[\overline{\varphi'_+}(x) = +\infty]$ qui, d'après notre lemme, est de mesure nulle. Par conséquent ΔE_k est de mesure nulle, ce qui implique une contradiction. Notre théorème est ainsi démontré[1]).

3. $f(x)$ étant une fonction non décroissante donnée et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ étant un nombre fini d'intervalles m'empiétant pas les uns sur les autres, nous désignerons par le symbole

$$V[f(x); \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m]$$

la somme des accroissements de $f(x)$ sur les intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, c'est-à-dire la somme

$$\sum_{i=1}^{m} [f(b_i) - f(a_i)],$$

où (a_i, b_i) désigne l'intervalle δ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

On voit sans peine que si $d_1, d_2, \ldots, d_n$ est un système fini d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et tel que tout inter-

[1]) Observons que, d'après une remarque de M. Sierpiński, l'ensemble $\mathrm{E}[f'_+(x) = +\infty]$ peut être non mesurable B (pour une fonction $f(x)$ non représentable analytiquement).

valle d_j est contenu dans un intervalle δ_i, on a (pour une fonction non décroissante $f(x)$):

(5) $$V[f(x), \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m] \geqslant V[f(x), d_1, d_2, \ldots, d_n].$$

4. Théorème 1. *Toute fonction monotone (continue ou non) a presque partout des dérivées unilatérales* ($f'_+(x)$ et $f'_-(x)$).

D é m o n s t r a t i o n. Il suffira évidemment de traiter le cas d'une fonction non décroissante, définie à l'intérieur d'un intervalle fini $d = (a, b)$.

Soit $N = \mathrm{E}[\overline{f'_-}(x) > \underline{f'_+}(x)]$; u et $v < u$ étant deux nombres rationnels, désignons par $N(u, v)$ l'ensemble

$$N(u, v) = \mathrm{E}[\overline{f'_+}(x) > u > v > \underline{f'_+}(x)]:$$

nous aurons évidemment la formule

$$N = \Sigma N(u, v),$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de deux nombres rationnels u, v, où $v < u$. L'ensemble de ces systèmes étant dénombrable, il suffira donc, pour prouver que N est de mesure nulle, de démontrer que les ensembles $N(u, v)$ sont tous de mesure nulle.

Admettons donc que pour un système $u, v\,(v < u)$ l'ensemble $E = N(u, v)$ n'est pas de mesure nulle: nous aurons donc $\mu = m_e(E) > 0$; ε étant un nombre positif donné quelconque, il existe donc un ensemble ouvert $G \supset E$, contenu dans d et tel que $m(G) < \mu + \varepsilon$.

Soit x un point de E: nous avons donc, d'après la définition de l'ensemble $N(u, v)$:

$$v > \underline{f'_+}(x);$$

E étant intérieur à G, il existe donc un nombre $h_x > 0$ tel que l'intervalle $\delta_x = (x, x + h_x)$ est intérieur à G et que

(6) $$\frac{f(x+h_x) - f(x)}{h_x} < v.$$

D'après le lemme de M. S i e r p i ń s k i il existe un nombre fini d'intervalles

(7) $$\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}$$

correspondant aux points $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de E, n'empiétant pas les uns sur les autres, tous intérieurs à G et tels que la partie E_1 de

E intérieure à la somme des intervalles (7) est de mesure extérieure $> \mu - \varepsilon$. D'après $m(G) < \mu + \varepsilon$ nous aurons donc

$$h_{x_1} + h_{x_2} + \ldots + h_{x_m} < \mu + \varepsilon. \tag{8}$$

La fonction $f(x)$ étant non décroissante, nous trouvons, d'après (6) et (8):

$$V[f(x), \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}] < v(\mu + \varepsilon). \tag{9}$$

Or, d'après $E_1 \subset E$ et d'après la définition de l'ensemble $N(u, v)$, nous avons pour tout point t de E_1:

$$\underline{f'_+}(t) > u;$$

il existe donc pour tout nombre t de E_1 un nombre $k_t > 0$ tel que l'intervalle $d_t = (t, t + k_t)$ est intérieur à celui d'intervalles (7) auquel est intérieur t et que

$$\frac{f(t+k_t) - f(t)}{k_t} > u. \tag{10}$$

D'après le lemme de M. Sierpiński il existe un nombre fini d'intervalles

$$d_{t_1}, d_{t_2}, \ldots, d_{t_n} \tag{11}$$

correspondant aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de E_1, n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que la partie E_2 de E_1 recouverte par les intervalles (11) est de mesure extérieure $m_e(E_2) > m_e(E) - \varepsilon >$ $> \mu - 2\varepsilon$. Par conséquent la somme de longueurs des intervalles (11) est $> \mu - 2\varepsilon$, c'est-à-dire

$$k_{t_1} + k_{t_2} + \ldots + k_{t_n} > \mu - 2\varepsilon,$$

d'où il résulte, d'après (10):

$$V[f(x), d_{t_1}, d_{t_2}, \ldots, d_{t_n}] > u(\mu - 2\varepsilon). \tag{12}$$

La fonction $f(x)$ étant non décroissante et tout intervalle (11) faisant partie d'un intervalle (7), nous avons (vu la formule (5) du § 3)

$$V[f(x), \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}] \geqslant V[f(x), d_{t_1}, d_{t_2}, \ldots, d_{t_n}],$$

ce qui donne, d'après (9) et (12):

$$v(\mu + \varepsilon) > u(\mu - 2\varepsilon);$$

le nombre positif ε pouvant être quelconque, il en résulte: $v\mu \geqslant u\mu$, donc, d'après $\mu > 0$:

$$v \geqslant u,$$

contrairement à l'hypothèse que $v < u$.

Nous avons donc $\mu = 0$, c'est-à-dire $m[N(u, v)] = 0$ pour tout système u, v (où $v < u$), ce qui entraîne: $m(N) = 0$. On a donc presque partout $\overline{f'_+}(x) = \underline{f'_+}(x)$, d'où résulte l'existence de la dérivée $f'_+(x)$ dans l'intervalle d, sauf peut être aux points x formant un ensemble de mesure nulle. Pour la dérivée à gauche, $f'_-(x)$, la démonstration serait tout à fait analogue (ou bien il suffirait de considérer la fonction $-f(-x)$).

Notre théorème 1 est ainsi démontré. D'après notre lemme 1 nous en obtenons encore ce

Théorème 2: *Toute fonction monotone a presque partout des dérivées unilatérales finies.*

5. L'ensemble $E[f'_-(x) \neq f'_+(x)]$ où une fonction d'une variable réelle $f(x)$ a des dérivées unilatérales distinctes est, comme on sait, tout au plus dénombrable [1]), donc de mesure nulle.

Pour la commodité du lecteur nous reproduisons ici la démonstration de M. Sierpiński. Il suffira de prouver que p. e. l'ensemble $E = E[f'_-(x) < f'_+(x)]$ est au plus dénombrable [2]).

Soit

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels différents.

Soit x un point de E: nous avons donc

$$f'_-(x) < f'_+(x)$$

et il existe un plus petit indice $k = k(x)$ tel que

$$f'_-(x) < r_k < f'_+(x). \tag{13}$$

D'après la définition de la dérivée $f'_-(x)$, resp. $f'_+(x)$, et en vertu de (13), il existe un plus petit indice $m = m(x)$ tel que $r_m < x$ et qu'on a

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < r_k \quad \text{pour} \quad r_m < \xi < x \tag{14}$$

[1]) W. Sierpiński: *Bull. Acad. Sc. Cracovie* 1912, p. 850 ss. Cf. G. C. Young: *Acta Mathematica* vol. 37 (1914) p. 147.

[2]) Par le même raisonnement on pourrait démontrer le théorème de M[me] G. C. Young (l. c., p. 144) d'après lequel l'ensemble $E[\underline{f'_-}(x) < \overline{f'_+}(x)]$ est au plus dénombrable (pour toute fonction d'une variable réelle $f(x)$).

et un plus petit indice $n = n(x)$ tel que $x < r_n$ et q'on a

$$(15) \qquad \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > r_k \quad \text{pour} \quad x < \xi < r_n.$$

D'après (14) et (15) nous avons

$$r_m < x < r_n$$

et

$$(16) \qquad f(\xi) - f(x) > r_k(\xi - x) \quad \text{pour} \quad \xi \neq x,\ r_m < \xi < r_n.$$

A tout nombre x de E correspond donc un système bien déterminé de trois indices (k, m, n) pour lesquels subsistent les formules (16).

Or. on voit sans peine qu'à des nombres différents de E correspondront toujours des systèmes différents d'indices (k, m, n): en effet, s'il correspondrait aux nombres x_1 et $x_2 \neq x_1$ de E le même système d'indices (k, m, n), on aurait, d'après (16) (pour $x = x_1$, $\xi = x_2$, resp. pour $x = x_2$, $\xi = x_1$):

$$f(x_2) - f(x_1) > r_k(x_2 - x_1)$$

et

$$f(x_1) - f(x_2) > r_k(x_1 - x_2),$$

ce qui est impossible.

L'ensemble des systèmes (k, m, n) de trois nombres naturels étant dénombrable, il en résulte que l'ensemble E est au plus dénombrable, c. q. f. d.

On déduit donc du théorème 2 le suivant

Théorème 3: *Toute fonction monotone $f(x)$ a presque partout une dérivée $f'(x)$ finie.*

Toute fonction à variation bornée étant une différence de deux fonctions monotones, le théorème 3 entraîne ce

Théorème 4: *Toute fonction à variation bornée a presque partout une dérivée finie.*

Ce théorème à été démontré d'abord par M. Lebesgue, à l'aide de son intégrale, pour les fonctions continues [1]); les démonstrations élémentaires ont été données ensuite par M. Faber [2]) et MM. Young [3]). MM. Carathéodory [4]) et Steinhaus [5]) ont étendu le théorème de M. Lebesgue aux fonctions quelconques à variation bornée.

[1]) H. Lebesgue: *Leçons sur l'intégration*, Paris 1904, p. 128.

[2]) G. Faber: *Math. Ann.* 69, p. 381—391.

[3]) W. H. and G. C. Young: Proc. of the London Math. Soc. 2 ser. Vol. 9, p. 325—335.

[4]) C. Carathéodory: *Vorles. üb. reelle Funktionen* Teubner 1918 p. 578.

[5]) H. Steinhaus: *Bull. Acad. Polonaise* 1920 p, 62.

6. Théorème 4. (Fubini) [1]) *Une série convergente de fonctions non décroissantes peut être presque partout différentiée terme à terme.*

Démonstration. Soit

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

où $f_k(x)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ est une suite de fonctions non décroissantes dans un intervalle (a, b). (Il suffira évidemment de considérer le cas où l'intervalle (a, b) est fini). Désignons par T_k, resp. T_0, l'ensemble de points où la fonction $F_k(x)$, resp. $F(x)$ n'a pas de dérivée finie et posons $T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k$: d'après le théorème 3 nous aurons

$$m(T) = \sum_{k=0}^{\infty} m(T_k) = 0.$$

Désignons par H le complémentaire de l'ensemble T par rapport à l'intervalle considéré. Les fonctions $f_k(x)$ étant non décroissantes, nous avons pour tout $h > 0$ et tout couple d'indices $n > p \geqslant 1$:

$$(17)\begin{cases} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h} + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{f_k(x+h)-f_k(x)}{h} \geqslant \\ \geqslant \dfrac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h} = \dfrac{F_p(x+h)-F_p(x)}{h} + \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \dfrac{f_k(x+h)-f_k(x)}{h} \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant \dfrac{F_p(x+h)-F_p(x)}{h}. \end{cases}$$

Donc on a pour tout x de H·

$$(18) \qquad F'(x) \geqslant F'_n(x) \geqslant F'_p(x) \quad \text{pour} \quad n > p.$$

Soit E l'ensemble de points de H où l'on a $F'(x) \neq \lim_{n=\infty} F'_n(x)$, donc, d'après (18):

$$F'(x) > \lim_{n=\infty} F'_n(x);$$

u, v, étant deux nombres rationnels et $u > v$, désignons par $E(u, v)$ l'ensemble

$$E(u, v) = \mathrm{E}[F'(x) > u > v > \lim_{n=\infty} F'_n(x)].$$

[1]) *Rend. Acc. Lincei*, 1915.

Nous aurons évidemment $E = \Sigma E(u, v)$, la sommation s'étendant à tous les systèmes de deux nombres rationnels u, v, où $v < u$, et, pour démontrer que $m(E) = 0$, il suffira de prouver que les ensembles $E(u, v)$ $(v < u)$ sont de mesure nulle.

Admettons donc qu'on a pour un système u, v $(v<u)$: $m_e[E(u, v)] = \mu > 0$.

Soit p un indice donné quelconque. D'après (18), si x appartient à $E(u, v)$, on a

$$F'(x) > u > v > F'_p(x):$$

il existe donc un nombre $h_x > 0$ tel que

$$F(x+h_x) - F(x) > h_x u > h_x v > F_p(x+h_x) - F_p(x). \tag{19}$$

D'après le lemme de M. Sierpiński, il existe un nombre fini d'intervalles

$$\delta_{x_i} = (x_i, x_i + h_{x_i}), \quad \text{où} \quad x_i \,\varepsilon\, E(u, v), \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{20}$$

n'empiétant pas les uns sur les autres, contenus dans (a, b) et dont la somme des longuers est $> \mu/2$, c'est-à-dire

$$h_{x_1} + h_{x_2} + \ldots + h_{x_N} > \frac{\mu}{2} \tag{21}$$

et nous pouvons supposer les intervalles (20) rangés de sorte que

$$x + h_{x_i} \leqslant x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N-1)$$

En posant encore $a = x_0$, $h_{x_0} = 0$, $b = x_{N+1}$, nous obtenons en vertu de (17), (19) et (21):

$$[F(b) - F(a)] - [F_p(b) - F_p(a)] = \sum_{k=1}^{N} [F(x_k + h_{x_k}) - F(x_k)] -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} [F_p(x_k + h_{x_k}) - F_p(x_k)] + \sum_{k=0}^{N} [F(x_{k+1}) - F(x_k + h_{x_k})] -$$

$$- \sum_{k=0}^{N} [F_p(x_{k+1}) - F_p(x_k + h_{x_k})] \geqslant \frac{\mu}{2}(u - v);$$

p étant un nombre naturel quelconque, cela donne, d'après $F(x) = \lim\limits_{n=\infty} F_n(x)$:

$$0 \geqslant \frac{\mu}{2}(u-v),$$

ce qui est impossible, puisque $\mu > 0$ et $u > v$.

Nous avons donc démontré que $m[E(u, v)] = 0$ pour $u > v$, et parsuite $m(E) = 0$. L'ensemble $T + E$, où la série ne peut être différentiée terme à terme, est donc de mesure nulle et notre théorème et démontré.