Sur le problème de la mesure.

Par

Stefan Banach (Léopol = Lwów).

Introduction.

Dans ce travail je m'occupe du *problème de la mesure* et des problèmes connnexes qui s'attachent aux questions suivantes:

Dans son livre „*Lecons sur l'intégration*" (Paris 1905) M. Lebesgue énonce les propriétés de son intégrale:

1°. Quels que soient a, b, h, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx.$$

2°. Quels que soient a, b, c, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$

3°. $$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4°. Si l'on a $f \geqslant 0$ et $b > a$, on a aussi $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

5°. On a: $\int_0^1 1 . dx = 1$.

6°. Si $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$, l'intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$.

En même temps M. Lebesgue pose le problème si la propriété 6° est indépendante de cinq autres, ce qu'il faut comprendre comme le problème si une intégrale jouissant des propriétés 1°—5°

pour un ensemble de fonctions, jouit nécessairement de la propriété 6°.

Dans son livre „*Grundzüge der Mengenlehre*" (Leipzig 1914), p. 469 ss., M. Hausdorff s'occupe du problème suivant, qu'on peut appeler *problème large de la mesure:* Peut-on attacher à chaque ensemble borné E d'un espace à m dimensions un nombre $m(E)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $m(E) \geqslant 0$,
2) $m(E_0) = 1$ pour un ensemble E_0 de l'espace considéré,
3) $m(E_1 + E_2) = m(E_1) + m(E_2)$, si $E_1 E_2 = 0$,
4) $m(E_1) = m(E_2)$ si les ensembles E_1 et E_2 sont superposables [1]).

Il prouve que ce problème est imposible pour l'espace à trois ou plus dimensions. Il démontre notamment (à l'aide de l'axiome de M. Zermelo) l'existence d'une décomposition de la surface d'une sphère en quatre ensembles A, B, C, D, où D est un ensemble dénombrable et $A \cong B \cong C$, $A \cong B + C$.

S'il existait une mesure satisfaisant aux conditions 1)—4), l'ensemble D aurait une mesure nulle et les conditions 1)—4) donneraient:

$$m(A) = m(B) = m(C) = \tfrac{1}{3},$$
$$m(A) = m(B + C) = \tfrac{1}{2}$$

ce qui implique une contradiction.

Un problème analogue n'est pas encore résolu pour l'espace à une ou deux dimensions.

M. S. Ruziewicz m'a posé le problème suivant:

Existe-il une opération $f(X)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $f(X)$ est définie pour tout ensemble mesurable (L) d'un espace à n dimensions.
2) $f(X) \geqslant 0$.
3) $f(X_0) = 1$ pour un certain ensemble X_0 tel que $m(X_0) = 1$.
4) $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$ pour $X . Y = 0$.
5) $f(X) = f(Y)$ si $X \cong Y$.
6) $f(X_1) \neq m(X_1)$ pour un certain ensemble X_1 mesurable (L).

[1]) Nous écrirons $E_1 \cong E_2$ pour exprimer que les ensembles E_1 et E_2 sont superposables (par translation ou rotation autour d'un centre ou autour d'un axe).

Je démontre dans ce travail qu'on peut attribuer une mesure à tout ensemble linéaire et à tout ensemble dans le plan. Je prouve aussi qu'on peut attacher à toute fonction bornée d'une variable réelle $f(x)$ et à tout intervalle (a, b) un nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ satisfaisant aux conditions 1^0-5^0 de M. Lebesgue: ce nombre peut être regardé comme une généralisation de l'intégrale. Pour une fonction intégrable au sens de Riemann ce nombre est son intégrale rimanienne; pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue ce nombre ne coïncide pas nécessairement avec son intégrale lebesguienne (et la condition 6^0 n'est pas alors satisfaite). Ainsi le problème de M. Lebesgue se trouve résolu négativement, c.-à-d. la condition 6^0 est indépendante des conditions 1^0—5^0. En ce qui concerne le problème de M. Hausdorff, nous voyons qu'il est autrement pour les espaces à une ou deux dimensions, où on peut attribuer une mesure à chaque ensemble, et autrement pour les espaces à $n \geqslant 3$ dimensions, où cela est impossible.

Le problème de M. Ruziewicz se trouve résolu affirmativement pour les espaces à une et deux dimensions, cependant pour les espaces à plusieurs dimensions le problème reste ouvert.

Toutes les fonctions considérées dans ce travail seront bornées, c.-à-d. pour toute fonction $f(x)$ existe un nombre $M(f(x)) > 0$, tel que $|f(x)| < M$ pour tout x pour lequel $f(x)$ est définie.

Soit $f(x) = f(x+1)$ une fonction de période 1, définie sur la circonférence d'un cercle de rayon $= 1/2\pi$, ayant pour centre l'origine des coordonnées rectangulaires; x désigne l'arc correspondant.

Définition 1. Nous appellerons la fonction $f(x)$ *équivalente à zéro*, en écrivant

$$f(x) \sim 0;$$

s'il existe pour tout nombre positif ε une suite finie de nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, telle qu'on a pour tout x réel

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k)\right| < \varepsilon.$$

Théorème 1. *Si* $f(x) \sim 0$ *et* $g(x) \sim 0$, *on a aussi*

$$f(x) + g(x) \sim 0.$$

Démonstration. D'après l'hypothèse il existe pour tout ε positif donné deux suites finies $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ telles qu'on a pour tout x réel

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k)\right| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\left|\sum_{l=1}^{r} g(x+\beta_l)\right| < \varepsilon,$$

ce qui donne sans peine:

$$\frac{1}{nr}\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}[f(x+\alpha_k+\beta_l)+g(x+\alpha_k+\beta_l)]\right| \leqslant 2\varepsilon;$$

il existe donc pour la somme $f(x)+g(x)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ une suite finie $\alpha_i + \beta_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, r)$ jouissant de la propriété exigée par la définition 1.

Théorème 2. *Si* $f(x) \sim 0$ *et si* C *est une constante réelle, on a* $C . f(x) \sim 0$.

La démonstration est évidente.

Théorème 3. *Si l'on a* $f(x) \geqslant C > 0$, *on n'a pas* $f(x) \sim 0$.

Dém. Quel que soit la suite finie $\{\alpha_i\}$, on a toujours

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i)\right| \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C = C.$$

Théorème 4. *Si* $f(x) \sim 0$, *si* a *est une constante réelle, et si l'on pose* $\varphi(x) = f(x+a)$, *on a*

$$\varphi(x) \sim 0.$$

Dém. Lorsque α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est une suite correspondante à la fonction $f(x)$, α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sera aussi une suite correspondante à la fonction $\varphi(x)$.

Définition 2. Nous écrirons

$$f(x) \sim g(x)$$

dans ce et seulement dans ce cas, lorsque

$$f(x) - g(x) \sim 0.$$

Théorème 5. *Lorsque*

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \sim h(x), \tag{1}$$

on a

$$f(x) \sim h(x).$$

Dém. D'après (1) et d'après le théorème 1, on trouve

$$[f(x) - g(x)] + [g(x) - h(x)] \sim 0,$$

donc

$$f(x) - h(x) \sim 0 \quad \text{et} \quad f(x) \sim h(x), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Definition 3. Nous écrirons

$$f(x) \succsim 0$$

lorsqu'il existe un $C > 0$ et une suite finie des nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tels qu'on a pour tout x réel l'inégalité

$$\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} f(x + \alpha_i) \geqslant C.$$

Definition 4. Nous écrirons

$$f(x) \precsim 0$$

lorsque

$$-f(x) \succsim 0.$$

Définition 5. Nous écrirons

$$f(x) \succsim g(x) \quad (\text{resp. } f(x) \precsim g(x))$$

lorsque

$$f(x) - g(x) \succsim 0 \quad (\text{resp. } f(x) - g(x) \precsim 0).$$

Théorème 6. *Lorsque* $f(x) \succsim 0$ *et lorsque* a *est une constante réelle, on a*

$$f(x + a) \succsim 0.$$

Dém. La suite corespondante à la fonction $\varphi(x) = f(x + a)$ est la même qu'à $f(x)$.

Un théorème analogue subsiste pour $f(x) \precsim 0$.

Théorème 7. *Si*

$$f(x) \succsim 0 \quad \textit{et} \quad g(x) \succsim 0,$$

on a

$$f(x) + g(x) \succsim 0.$$

La démonstration est analogue à la démonstration du théorème 1.
Un théorème analogue subsiste pour la relation $\precsim$.

Théorème 8. *Si l'on a pour tout x réel*

$$f(x) \geqslant 0,$$

on n'a pas

$$f(x) \precsim 0.$$

Dém. Il suffit de remarquer qu'on aura pour toute suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k) \geqslant 0,$$

et de se rapporter à la définition 4.

Théorème 9. *Les relations*

$$f(x) \succsim 0, \quad f(x) \sim 0, \quad f(x) \succsim 0$$

s'excluent deux à deux.

Dém. Si $f(x) \succsim 0$, il existe, d'après la déf. 3, un $C > 0$ et une suite finie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i) \geqslant C.$$

S'il était $f(x) \sim 0$, on aurait, d'après les théorèmes 4 et 1:

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x+\alpha_i) \sim 0;$$

or les formules (A) et (B) sont incompatibles, d'aprés le théorème 3.

Or, en supposant qu'on a simultanément $f(x) \succsim 0$ et $f(x) \precsim 0$, on aurait d'après le théorème 6:

$$f(x+\alpha_k) \precsim 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n,$$

donc, d'après le théorème 7:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k) \precsim 0,$$

ce qui est impossible d'aprés (A) et le théorème 8.

Pareillement on démontrerait que les relations $f(x) \succsim 0$ et $f(x) \sim 0$ sont incompatibles.

Théorème 10. *Si*

$$f(x) \succsim g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \succsim h(x),$$

on a

$$f(x) \succsim h(x).$$

Dém. On a d'aprés l'hypothèse et la définition 5:

$$f(x) - g(x) \succsim 0 \quad \text{et} \quad g(x) - h(x) \succsim 0,$$

donc, d'après le théorème 7:

$$[f(x) - g(x)] + [g(x) - h(x)] \succsim 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) \succsim g(x), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Un théorème analogue subsiste pour la relation $\precsim$.

Théorème 11. *Si*

$$f(x) \succsim 0 \quad \text{et} \quad g(x) \sim 0,$$

on a

$$f(x) + g(x) \succsim 0.$$

En partant des définition 3 et 1 on démontre le théorème 11 d'une façon analogue à la démonstration du théorème 1.

Théorème 12. *Si*

$$f(x) \succsim g(x), \quad f(x) \sim f_1(x), \quad g(x) \sim g_1(x),$$

on a

$$f_1(x) \succsim g_1(x)$$

Dém. D'après l'hypothèse et d'après les définitions 5 et 2 nous avons

$$f(x) - g(x) \succsim 0, \quad f_1(x) - f(x) \sim 0, \quad g(x) - g_1(x) \sim 0,$$

donc, d'aprés le théorème 11:

$$f_1(x) - g_1(x) \succsim 0,$$

c'est-à-dire $f_1(x) \succsim g_1(x)$, c. q. f. d.

Considérons maintenant l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ définies sur la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{1}{2\pi}$, ayant pour centre l'origine des coordonnées. Chacune de ces fonctions sera supposée bornée (mais les fonctions considérées ne seront pas bornées en leur ensemble).

Divisons toutes les fonctions considérées en classes, en rangeant dans une même classe deux fonctions équivalentes et dans les classes différentes deux fonctions qui ne sont pas équivalentes. Une telle classification est possible, d'après le théorème 5. Les classes de fonctions ainsi obtenues seront appellées *hyperfonctions* et désignées par des majuscules F, Φ, F_1 etc. Il est évident que deux hyperfonctions F_1 et F_2 sont identiques ou bien n'ont pas d'éléments communs.

Définition 6. Si F est une hyperfonction dont un élément est la fonctions $f(x)$ et si C est une constante réelle, $C.F$ désignera l'hyperfonction dont un élément est la fonction $C.f(x)$.

Définition 7. Si F_1 et F_2 sont des hyperfonctions contenant resp. les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$,

$$F = F_1 + F_2$$

désignera l'hyperfonction qui contient la fonction $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

On prouve sans peine que les hyperfonctions $C.F$, resp. $F_1 + F_2$ ne dépendent que des hyperfonctions F, resp. F_1 et F_2.

Définition 8. $-F$ désignera l'hyperfonction $-1.F$.

D'après les définitions 6, 7 et 8, l'expression

$$\sum_{k=1}^{n} C_k F_k,$$

où C_k sont des constantes réelles et F_k des hyperfonctions, a un sens et détermine une hyperfonction.

Définition 9. c étant une constante réelle, nous poserons

$$F = c$$

si la hyperfonction F contient la fonction $f(x) = c$.

Définition 10. Nous écrirons

$$F_1 > F_2$$

si toute fonction $f(x)$ qui appartient à l'hyperfonction $F_1 - F_2$ satisfait à la relation

$$f(x) \succeq 0.$$

Théorème 13. *Il existe pour toute hyperfonction F deux hyperfonctions $F_1 = c_1$ et $F_2 = c_2$, telles que*

$$F_1 > F > F_2.$$

Démonstration. ε étant un nombre positif donné et $f(x)$ un élément de F, désignons par c_1 un nombre réel, tel que

$$f(x) < c_1 - \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \text{ réel}$$

(la fonction $f(x)$ étant bornée, un tel nombre c_1 existe): nous aurons $c_1 - f(x) > \varepsilon > 0$, donc (Déf. 3): $c_1 - f(x) \succ 0$, ce qui donne d'après le théorème 12 et la déf. 10: $F_1 > F$.

De même pour le signe $<$.

Un ensemble d'hyperfonctions Ω sera appelé *corps*, s'il jouit de la propriété suivante:

Si les hyperfonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ appartiennent à Ω et si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des constantes réelles, l'hyperfonction

$$F = c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ldots + c_n F_n$$

appartient à Ω.

Dans les considérations ultérieures seront envisagés les corps $\Omega(R)$ et $\Omega(L)$. $\Omega(R)$ est défini comme le plus petit corp jouissant de la propriété suivante:

Toute fonction bornée $f(x)$, intégrable au sens de Riemann appartient à une hyperfonction R contenue dans $\Omega(R)$.

On voit sans peine qu'un tel corps existe et que toute hyperfonction R de ce corps contient une fonction intégrable au sens de Riemann.

Pareillement on définit le corps $\Omega(L)$ en remplaçant dans la définition de $\Omega(R)$ les fonctions intégrables au sens de Riemann par les fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

Remarque. Soit $\Omega(F)$ un corps d'hyperfonctions F, Φ — une hyperfonction qui n'appartient pas à $\Omega(F)$. Formons le plus petit corps $\Omega(F, \Phi)$ contenant $\Omega(F)$ et l'hyperfonction Φ: on voit sans peine que $\Omega(F, \Phi)$ se compose d'hyperfonctions de la forme $F + c\Phi$, où c est une constante et F est une hyperfonction faisant partie de $\Omega(F)$.

On voit sans peine que toute hyperfonction Ψ appartenant à $\Omega(F, \Phi)$ peut être présentée d'une seule manière sous la forme

$$\Psi = F + c\Phi.$$

En effet, en admettant qu'on a encore la formule

$$\Psi = F' + c'\Phi,$$

on aurait

$$(c - c')\Phi = F' - F.$$

S'il était $c' = c$, on aurait $F' = F$ et les décompositions seraient identiques; or il ne peut être $c' \neq c$, puisque on aurait

$$\Phi = \frac{1}{c - c'} F' - \frac{1}{c - c'} F,$$

et Φ appartiendrait à $\Omega(F)$, contrairement à l'hypothèse. On en voit aussi que lorsque les hyperfonctions Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 appartiennent à $\Omega(F, \Phi)$ et lorsqu'on a

$$\Psi_3 = a\Psi_1 + b\Psi_2 \quad \text{(où } a, b \text{ sont des const. réelles)}$$

et

$$\Psi_1 = F_1 + c_1\Phi, \quad \Psi_2 = F_2 + c_2\Phi, \quad \Psi_3 = F_3 + c_3\Phi,$$

on a:

$$\text{(I)} \qquad F_3 = aF_1 + bF_2 \quad \text{et} \quad c_3 = ac_1 + bc_2.$$

En effet:

$$\Psi_3 = (aF_1 + bF_2) + (ac_1 + bc_2)\Phi = F_3 + c_3\Phi,$$

ce qui donne, d'après l'unicité du développement, les relations (I).

Définition 11. Soit $\Omega(F)$ un corps d'hyperfonctions F. Considérons une opération $A(F)$ dont l'argument indépendant est une hyperfonction F appartenant à Ω et l'argument dépendant — un nombre réel. Nous dirons que l'opération $A(F)$ est *additive*, si les conditions que F_1 et F_2 appartiennent à Ω et que c_1 et c_2 sont des constantes réelles, entraînent:

$$A(c_1F_1 + c_2F_2) = c_1A(F_1) + c_2A(F_2).$$

Définition 12. L'opération $A(F)$ est appelée *non négative*, si pour tout $F \geqslant 0$ appartenant à $\Omega(F)$ on a: $A(F) \geqslant 0$.

Théorème 14. *Soit Φ une hyperfonction n'appartenant pas à $\Omega(F)$ et telle qu'il existe deux hyperfonctions F_1 et F_2 de $\Omega(F)$ satisfaisant à l'inégalité*

$$F_1 > \Phi > F_2,$$

et soit $A(X)$ une opération additive et non négative, définie pour les hyperfonctions X de corps $\Omega(F)$.

Thèse: *Il existe une opération additive, non négative $\overline{A}(X)$, définie dans le corps $\Omega(F, \Phi)$ et telle que*

$$\overline{A}(X) = A(X) \quad \textit{lorsque } X \textit{ appartient à } \Omega(F).$$

Dém. D'après l'hypothèse, il existe dans $\Omega(F)$ des hyperfonctions $F_1 > \Phi$; désignons par α la borne inférieure de tous les nombres $A(F_1)$, où F_1 est une hyperfonction de $\Omega(F)$ qui est $> \Phi$; α sera donc un nombre fini, non négatif.

Toute hyperfonction Ψ de $\Omega(F, \Phi)$ est de la forme

$$\Psi = F + c\,\Phi, \tag{II}$$

où F appartient à $\Omega(F)$ et c est un nombre réel, et cette décomposition est unique.

Définissons l'opération $\overline{A}(\Psi)$, en posant

$$\overline{A}(\Psi) = A(F) + c\alpha.$$

La décomposition (II) étant unique, l'opération $\overline{A}(\Psi)$ est ainsi définie d'une façon univoque. Lorsque Ψ appartient à $\Omega(F)$, on a $\overline{A}(\Psi) = A(\Psi)$, puisque alors $\Psi = F + c\alpha$ et $c = 0$, donc $\overline{A}(\Psi) = A(F) = A(\Psi)$.

L'opération $\overline{A}(\Psi)$ est additive, puisque $\Psi_3 = a\,\Psi_1 + b\,\Psi_2$ donne (v. les formules I):

$$F_3 = aF_1 + bF_2, \quad c_3 = ac_1 + bc_2,$$

donc

$$\overline{A}(\Psi_3) = A(F_3) + c_3\alpha = A(aF_1 + bF_2) + (ac_1 + bc_2)\alpha =$$
$$= a[A(F_1) + c_1\alpha] + b[A(F_2) + c_2\alpha] = a\overline{A}(\Psi_1) + b\overline{A}(\Psi_2).$$

Or l'opération $\overline{A}(\Psi)$ est non négative. Soit en effet

$$\Psi = F + c\Phi \geqslant 0.$$

Si $c = 0$, Ψ appartient à $\Omega(F)$ et on a $\overline{A}(\Psi) = A(\Psi) \geqslant 0$.

Si $c > 0$, nous avons $\Phi \geqslant -\dfrac{1}{c}F$, donc, pour tout $F_1 > \Phi$ de $\Omega(F)$:

$$F_1 > -\frac{1}{c}, \quad \text{donc} \quad F_1 + \frac{1}{c} > 0,$$

ce qui donne

$$A\left(F_1 + \frac{1}{c}F\right) = A(F_1) + \frac{1}{c}A(F) \geqslant 0,$$

donc, d'après la définition du nombre α:

$$\alpha + \frac{1}{c}A(F) \geqslant 0,$$

donc, c étant > 0: $\overline{A}(\Psi) = A(F) + c\alpha \geqslant 0.$

Si $c < 0$, nous avons $-\frac{1}{c}F \geqslant \Phi$, donc $-\frac{1}{c}F > \Phi$, puisque Φ n'appartient pas à $\Omega(F)$. D'après la déf. du nombre α nous avons donc $A\left(-\frac{1}{c}F\right) \geqslant \alpha$, ce qui donne, c étant < 0, $\overline{A}(\Psi) = A(F) + c\alpha \geqslant 0$.

L'inégalité $\Psi \geqslant 0$ entraîne donc toujours l'inégalité $\overline{A}(\Psi) \geqslant 0$ et le théorème est démontré complétement.

Théorème 15. *Soit $\{\Omega_\alpha\}$ $(\alpha < \beta)$ un ensemble bien ordonné du type β des corps non décroissants d'hyperfonctions* [1]*, et soit pour tout $\alpha < \beta$ définie dans le corps Ω_α une opération additive et non négative $A_\alpha(X)$, telle que $A_\alpha(X) = A_\xi(X)$ pour tous le $\xi < \alpha$ et toutes les hyperfonctions X appartenant à Ω_ξ. Si l'on désigne $\Omega = \sum_{\alpha<\beta} \Omega_\alpha$ et si l'on pose pour tout X de Ω: $A(X) = A_{\alpha(X)}(X)$, où $\alpha(X)$ désigne le plus petit nombre ordinal, tel que X appartient à $\Omega_{\alpha(X)}$, $A(X)$ est une opération additive et non négative, définie dans le corps Ω.*

Dém. On voit sans peine qu'une somme (d'un nombre fini ou d'une infinité quelconque) des corps non décroissants d'hyperfonctions est un corps: donc $\Omega = \sum_{\alpha<\beta} \Omega_\alpha$ est un corps.

Soient X_1 et X_2 deux hyperfonctions appartenant à Ω, a et b deux nombres réels. Soit α_0 celui de deux nombres $\alpha(X_1)$ et $\alpha(X_2)$ qui est plus grand (ou leur valeur commune, s'ils sont égaux): nous aurons évidemment $\alpha_0 < \beta$. Les hyperfonctions X_1 et X_2 appartiennent donc toutes les deux à Ω_{α_0}: par conséquent, $A_{\alpha_0}(X)$ étant une opération additive dans Ω_{α_0}:

$$\text{(III)} \qquad A_{\alpha_0}(aX_1 + bX_2) = aA_{\alpha_0}(X_1) + bA_{\alpha_0}(X_2).$$

Or, d'après l'hypothèse, et d'après $\alpha(X_1) \leqslant \alpha_0$ et $\alpha(X_2) \leqslant \alpha_0$:

$$A_{\alpha(X_1)}(X_1) = A_{\alpha_0}(X_1), \quad A_{\ (X_2)}(X_2) = A_{\alpha_0}(X_2).$$

Or, d'après la définition du nombre $\alpha(X)$, Ω_{α_0} étant un corps contenant X_1 et X_2, donc aussi $X_0 = aX_1 + bX_2$:

$$\alpha(X_0) \leqslant \alpha_0,$$

donc

$$A_{\alpha(X_0)}(X_0) = A_{\alpha_0}(X_0).$$

[1]) C'est-à-dire $\Omega_\xi \subset \Omega_\eta$ pour $\xi < \eta < \beta$.

La formule (III) donne donc

$$A_{\alpha(x_0)}(X_0) = aA_{\alpha(x_1)}(X_1) + bA_{\alpha(x_2)}(X_2),$$

donc, d'après la définition de l'opération $A(X)$ et d'après $X_0 = aX_1 + bX_2$:

$$A(aX_1 + bX_2) = aA(X_1) + bA(X_2),$$

ce qui prouve que l'opération $A(X)$ est additive.

Or, il résulte immédiatement de la formule $A(X) = A_{\alpha(x)}(X)$ et de l'hypothèse sur les opérations $A_\alpha(X)$ $(\alpha < \beta)$, que l'opération $A(X)$ est non négative.

Notre théorème est ainsi démontré.

Théorème 16. *Si $\Omega(F)$ est un corps d'hyperfonctions contenant l'hyperfonction $F=1$ et s'il existe une opération additive et non négative, définie dans $\Omega(F)$, il existe une opération additive et non négative $\overline{A}(X)$, définie pour toute hyperfonction, et telle que $\overline{A}(X) = A(X)$, lorsque X appartient à $\Omega(F)$.*

Dém. Soit $\{\Phi_\alpha\}$ $(\alpha < \gamma)$ un ensemble bien ordonné, du type γ, formé de toutes les hyperfonctions ne faisant pas partie de $\Omega(F)$. Désignons, pour tout $\alpha \leqslant \gamma$, par Ω_α le plus petit corps contenant le corps $\Omega_0 = \Omega(F)$ et toutes les hyperfonctions Φ_ξ pour $\xi < \alpha$. (On voit sans peine que, $\mathcal{E}$ désignant un ensemble quelconque d'hyperfonctions, il existe toujours un plus petit corps d'hyperfonction contenant $\mathcal{E}$). $\{\Omega_\nu\}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma)$ sera donc un ensemble bien ordonné non décroissant de corps d'hyperfonction et Ω_γ sera le corps de toutes les hyperfonctions.

Je dis qu'on peut définir, par l'induction transfinie, pour tout $\alpha \leqslant \gamma$, une opération additive et non négative $A_\alpha(X)$ dans le corps Ω_α, telle que $A_\alpha(X) = A_\xi(X)$ pour tous les $\xi < \alpha$ et toutes les hyperfonctions X appartenant à Ω_ξ.

En effet, posons $A_0(X) = A(X)$ dans $\Omega_0 = \Omega(F)$.

Soit maintenant $\lambda \geqslant 1$ un nombre ordinal $\leqslant \gamma$ et supposons que pour $0 \leqslant \alpha < \lambda$ sont définies les opérations $A_\alpha(X)$ telles que $A_\alpha(X)$ est une opération additive et non négative dans Ω_α et que $A_\alpha(X) = A_\xi(X)$ pour $\xi < \alpha$ et pour les X de Ω_ξ. Distinguons deux cas:

1) λ est un nombre de première espèce, c'est-à-dire il existe le nombre $\lambda - 1 \geqslant 0$. Soit $\Omega_{\lambda-1} = \Omega(\Psi)$: il résulte de la définition des corps Ω_α qu'on a $\Omega_\lambda = \Omega(\Psi, \Phi_{\lambda-1})$. Si $\Phi_{\lambda-1}$ appartient à $\Omega_{\lambda-1}$,

on a $\Omega_\lambda = \Omega_{\lambda-1}$ et on peut poser $A_\lambda(X) = A_{\lambda-1}(X)$ dans Ω_λ. Supposons donc que $\Phi_{\lambda-1}$ n'appartient pas à $\Omega_{\lambda-1}$. Pour définir l'opération $A_\lambda(X)$ nous appliquerons le théorème 14. D'après l'hypothèse, le corps Ω_0, donc aussi le corps $\Omega_{\lambda-1}$, contient l'hyperfonction $F = 1$, donc toute hyperfonction $F = c$, c étant un nombre réel quelconque. D'après le théorème 13, les conditions du théorème 14 sont donc réalisées pour le corps $\Omega_{\lambda-1}$. Donc, d'après le th. 14, on peut définir une opération additive et non négative $A_\lambda(X)$ dans le corps $\Omega_\lambda = \Omega(\Psi, \Phi_{\lambda-1})$, telle que $A_\lambda(X) = A_{\lambda-1}(X)$ lorsque X appartient à $\Omega_{\lambda-1}$. D'après la propriété de $A_{\lambda-1}(X)$ nous aurons évidemment aussi $A_\lambda(X) = A_\xi(X)$ pour $\xi < \lambda$ et pour les hyperfonctions X de Ω_ξ.

2) λ est un nombre de seconde espèce. Comme on voit sans peine, on a alors $\Omega_\lambda = \sum\limits_{\alpha<\lambda} \Omega_\alpha$, et pour avoir dans Ω_λ l'opération $A_\lambda(X)$ jouissant des propriétés désirées, on n'a qu'à appliquer le théorème 15.

Nous avons ainsi défini par l'induction transfinie les opérations $A_\lambda(X)$ pour $\lambda \leqslant \gamma$ et, en particulier, l'opération $A_\gamma(X)$. L'opération $A_\gamma(X)$, définie dans le corps Ω_γ de toutes les hyperfonction, jouit évidemment des propriétés démandées par le théorème 16.

Le théorème 16 est ainsi démontré.

Applications.

Théorème 17. *Toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de* Riemann[1]) *satisfait à la relation*

$$f(x) \sim c, \quad \text{où} \quad c = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Dém. Comme on voit sans peine, l'expression

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

converge (pour une fonction intégrable R) uniformément vers $\int_0^1 f(x) dx$ pour $n = \infty$, donc

[1]) Rappelons qu'il s'agit toujours des fonctions bornées, définies sur une circonférence.

$$\left|\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right]-c\right|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad n>\mu(\varepsilon),$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-c\right]\right|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad n>\mu(\varepsilon),$$

ce qui démontre que $f(x)-c\sim 0$, donc $f(x)\sim c$, c. q. f. d.

Théorème 18. *Il existe une fonction bornée $\varrho(x)$, dont l'intégrale lebesguienne est nulle et telle que toute fonction $\varphi(x)$ intégrable au sens de Riemann et satisfaisant à la relation*

$$(1) \qquad \varphi(x) \geqq \varrho(x),$$

vérifie l'inégalité

$$(2) \qquad \int_0^1 \varphi(x)\,dx > 1.$$

Dém. Considérons sur la circonférence un ensemble E de mesure lebesguienne nulle, dont le complémentaire est de première catégorie de M. Baire. La fonction $\varrho(x)$ égale à 1 sur E et à 0 sur le complémentaire de E satisfait aux conditions de notre théorème.

En effet, il est clair que

$$(L)\int_0^1 \varrho(x)\,dx = 0.$$

Or, soit $\varphi(x)$ une fonction intégrable (R) et satisfaisant à la relation (1). Il existe donc une suite finie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$ et un nombre $\varepsilon>0$, tels que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x+\alpha_i)-\varrho(x+\alpha_i)]>\varepsilon,$$

pour tout x réel. Il en résulte tout de suite que pour tout k naturel et tout x réel subsiste l'inégalité

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi\left(x+\alpha_i+\frac{j}{k}\right)-\varrho\left(x+\alpha_i+\frac{j}{k}\right)\right]\right\}>\varepsilon,$$

donc

$$(3) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\varphi\left(x+\alpha_i+\frac{j}{k}\right)\right\}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\varrho\left(x+\alpha_i+\frac{j}{k}\right)\right\}>\varepsilon.$$

Pour $k > \mu$ (et tout x réel) la première de ces sommes diffère de $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ à moins que de ε. Or, je dis qu'il existe des nombres x pour lesquels la seconde des sommes (3) est $=1$. Désignons, en effet, par $E\left(\alpha_i + \frac{j}{k}\right)$ l'ensemble qu'on obtient en tournant l'ensemble E (autour du centre de la circonférence considérée) d'un angle $\alpha_i + \frac{j}{k}$. L'ensemble E ayant pour complémentaire un ensemble de première catégorie, il en est de même pour tout ensemble $E\left(\alpha_i + \frac{j}{k}\right)$, pour $i = 1, 2, \ldots n$; $j = 1, 2, \ldots k$: leur produit Π est donc un ensemble de deuxième catégorie. Pour tout nombre x de Π nous aurons évidemment

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\varrho\left(x + \alpha_i + \frac{j}{k}\right)\right\} = 1,$$

donc, l'inégalité (3) subsistant pour tous les x réels:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx + \varepsilon - 1 > \varepsilon,$$

ce qui donne l'inégalité (2).

Remarque 1. La borne inférieure de toutes les intégrales de toutes les fonctions intégrables R et satisfaisant à la relation (1) est $=1$, puisque pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction $\varphi(x) = 1 + \varepsilon$ vérifié cette relation.

Remarque 2. La fonction $\varrho(x)$ n'est équivalente à aucune fonction $\varrho(x)$ intégrable R.

En effet, s'il était

$$\varrho(x) \sim \varphi(x), \quad \text{où} \quad \varphi(x) \text{ est intégrable } R,$$

alors, en désignant $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = c$, on aurait, d'après le théorème 17:

$$\varrho(x) \sim c, \quad \varrho(x) - c \sim 0,$$

donc, pour tout $\varepsilon > 0$ donné et pour une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ convenable:

$$(4) \qquad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [\varrho(x+\alpha_k) - c] \right| < \varepsilon, \quad \text{pour tout } x.$$

Or, il résulte sans peine de la définition de la fonction $\varrho(x)$ qu'il existe des points x dans lesquels l'expression $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varrho(x+\alpha_k)$ prend la valeurs 1, et des points x (formant un ensemble de mesure 1) dans lesquels cette expression prend la valeur 0. L'inégalité (4) est donc impossible.

Théorème 19. *Il existe une opération H, dont le contre-domaine est ensemble des nombres réels, définie pour toute fonction bornée (définie sur la circonférence), satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux fonctions (bornées), c_1 et c_2 deux nombres réels, on a*

$$H(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 H(f_1(x)) + c_2 H(f_2(x)).$$

2) *Si $f_1(x) \geqslant 0$ pour tout x (sur la circonférence), on a*

$$H(f_1(x)) \geqslant 0.$$

3) *Si $f_1(x) = c$, on a $H(f_1(x)) = c$.*

4) *Pour tout α réel on a*

$$H(f(x)) = H(f(\pm x + \alpha)).$$

5) *Lorsque $f(x)$ est intégrable (L), on a*

$$H(f(x)) = (L)\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Dém. Considérons le corps $\Omega(L)$. En conservant les notations du théorème 16, posons pour les hyperfonctions X de $\Omega(L)$:

$$A(X) = (L)\int_0^1 \varphi(x)\,dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction intégrable (L) faisant partie de l'hyperfonction X.

Pour prouver que $A(X)$ est bien déterminé pour tout X de $\Omega(L)$, il suffira évidemment de démontrer qu'on a

$$(\alpha) \qquad (L)\int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

pour toute fonction $f(x)$ intégrable (L) et satisfaisant à la relation

$$(\beta) \qquad f(x) \sim 0.$$

D'après (β) il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telle que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k)\right| < \varepsilon, \quad \text{donc} \quad (L)\int_0^1 \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k)\right| dx < \varepsilon,$$

et, à plus forte raison:

$$(\gamma) \qquad \left|(L)\int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k)\,dx\right| < \varepsilon;$$

or:

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = (L)\int_0^1 f(x+\alpha_k)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(L)\int_0^1 f(x+\alpha_k)\,dx$$

(puisque $f(x+1) = f(x)$): donc, d'après (γ):

$$(\delta) \qquad \left|(L)\int_0^1 f(x)\,dx\right| < \varepsilon;$$

le nombre ε étant aussi petit que l'on veut, l'inégalité (δ) donne l'égalité (α), c. q. f. d.

Si $X \geqslant 0$, alors, en désignant par $\varphi(x)$ une fonction quelconque intégrable (L) et faisant partie de X, nous aurons

$$\text{soit} \quad \varphi(x) \succ 0, \quad \text{soit} \quad \varphi(x) \sim 0.$$

Dans le premier cas nous avons pour une certaine suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et certain c:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x+\alpha_k) > c, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(L)\int_0^1 \varphi(x+\alpha_k)\,dx > c,$$

c'est-à-dire

$$(L)\int_0^1 \varphi(x)\,dx > c,$$

donc

$$A(X) > c > 0.$$

Or, nous avons démontré que pour les fonctions intégrables (L) la relation (β) entraîne l'inégalité (α). Il en résulte tout de suite que dans le second cas $(\varrho(x) \sim 0)$ nous aurons $A(X) = 0$.

Nous avons donc pour tout $X \geqslant 0$ de $\Omega(L)$:

$$A(X) \geqslant 0.$$

L'opération $A(X)$ est donc non négative.

Or, l'opération $A(X)$ est additive: en effet, si

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2, \quad (\text{où } X, X_1 \text{ et } X_2 \text{ appartiennent à } \Omega(L)),$$

alors, en désignant resp. par $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ des fonctions intégrables (L) et faisant partie de X_1, X_2, nous aurons:

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$$

où $\varphi(x)$ appartient à X, ce qui donne:

$$A(X) = (L)\int_0^1 (c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x))\, dx =$$

$$= c_1 (L)\int_0^1 \varphi_1(x)\, dx + c_2 (L)\int_0^1 \varphi_2(x)\, dx = c_1 A(X_1) + c_2 A(X_2).$$

Or $\Omega(L)$ contient l'hyperfonction $X_0 = 1$. Les conditions du théorème 16 sont donc réalisées. En vertu de ce théorème il existe donc une opération additive et non négative $\overline{A}(X)$, définie pour toute hyperfonction X et telle que $\overline{A}(X) = A(X)$ pour tout X de $\Omega(L)$.

Définissons maintenant une opération $G(f(x))$, dont le domaine est l'ensemble de toutes les fonctions (bornées à période 1) et le contre-domaine — l'ensemble de nombres réels $(\geqslant 0)$, comme il suit: Si $f(x)$ appartient à l'hyperfonction X, posons

$$G(f(x)) = \overline{A}(X).$$

L'opération G est déterminée d'une façon univoque puisque $f(x)$ appartient à un seul X. Elle est additive, puisque si

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$

les hyperfonctions correspondantes satisfont à la relation

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2,$$

ce qui donne, $\overline{A}(X)$ étant une operation additive:

$$\overline{A}(X) = c_1 \overline{A}(X_1) + c_2 \overline{A}(X_2),$$

donc

$$G(f(x)) = c_1 G(f_1(x)) + c_2 G(f_2(x))$$

Or, $G(f(x)) \geqslant 0$ pour $f(x) \geqslant 0$. En effet, envisageons la fonction

$$\varphi(x) = c + f(x), \quad \text{où} \quad c > 0:$$

nous aurons $\varphi(x) \geqslant c$ (pour tout x réel), donc

$$\varphi(x) \succ 0;$$

l'hyperfonction correspondante Φ vérifie donc l'inégalité $\Phi > 0$, donc $A(\Phi) \geqslant 0$, ce qui donne $G(\varphi(x)) \geqslant 0$, donc

$$G(c + f(x)) \geqslant 0,$$

ce qui donne (G étant une opération additive):

$$G(f(x)) \geqslant - G(c) = - c,$$

donc, c étant un nombre positif quelconque:

$$G(f(x)) \geqslant 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

L'opération G vérifie aussi l'égalité

$$G(f(x + \alpha)) = G(f(x)),$$

puisque nous avons $f(x + \alpha) \sim f(x)$ et parsuite les deux fonctions appartiennent à la même hyperfonction X.

Or, il est clair que

$$G(f(x)) = (L)\int_0^1 f(x)\,dx$$

lorsque $f(x)$ est intégrable (L).

Définissons maintenant l'opération $H(f(x))$ en posant

$$H(f(x)) = \tfrac{1}{2} G(f(x)) + \tfrac{1}{2} G(f(-x)).$$

Cette opération vérifie les conditions 1)—5) de notre théorème.

1) Elle est additive, puisque G l'est.

2) Pour $f(x) \geqslant 0$ nous avons $f(-x) \geqslant 0$, donc $G(f(x)) \geqslant 0$; $G(f(-x)) \geqslant 0$ et $H(f(x)) \geqslant 0$.

3) Pour $f(x) = c$ nous avons

$$H f(x)) = \tfrac{1}{2}G(c) + \tfrac{1}{2}G(c) = G(c) = c.$$

4) Nous avons

$$\begin{aligned} H(f(\pm x + a)) &= \tfrac{1}{2}G(f(\pm x + a)) + \tfrac{1}{2}G(f(\mp x - a)) = \\ &= \tfrac{1}{2}G(f(\pm x)) + \tfrac{1}{2}G(f(\mp x)) = H(f(x)). \end{aligned}$$

5) Lorsque $f(x)$ est intégrable (L), nous avons, d'après $f(x) = f(x+1)$:

$$\begin{aligned} H(f(x)) &= \tfrac{1}{2}G(f(x)) + \tfrac{1}{2}G(f(-x)) = \tfrac{1}{2}G(f(x)) + \tfrac{1}{2}G(f(1-x)) = \\ &= \tfrac{1}{2}(L)\int_0^1 f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}(L)\int_0^1 f(1-x)\,dx = (L)\int_0^1 f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Le théorème 19 est ainsi démontré complètement.

Théorème 20. *Il existe une opération H vérifiant les conditions 1)—4) du théorème 19 qui n'est pas identique à l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions bornées intégrables (L).*

Dém. Considérons le corps $\Omega(R)$ et désignons par P l'hyperfonction qui contient la fonction $\varrho(x)$ définie dans le théorème 18 (qui, comme nous avons observé dans la remarque 2 au th. 18, n'appartient à aucune hyperfonction de $\Omega(R)$).

Posons dans le corps $\Omega(R)$:

$$(\varepsilon) \qquad A(X) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction intégrable R, contenue dans X. Pour définir dans le corps $\Omega_1 = \Omega(R, P)$ l'opération additive et non négative $A_1(X)$, telle que $A_1(X) = A(X)$ dans $\Omega(R)$, nous pouvons poser

$$(\eta) \qquad A_1(R + cP) = A(R) + c$$

(voir la dém. du th. 14), puisque, d'après la remarque I au théorème 18 et d'après (ε), la borne inférieure α de tous les nombres $A(X)$ pour les hyperfonctions X de $\Omega(R)$ vérifiant l'inégalité $X > P$ est $= 1$.

De (η) résulte en particulier que

$$A_1(P) = 1.$$

En appliquant maintenant le théorème 16, nous concluons qu'il existe une opération additive et non négative $\overline{A}(X)$ définie pour toute hyperfonction et telle que $\overline{A}(X) = A_1(X)$ pour les X de $\Omega_1 = \Omega(R, P)$, donc

$$(\zeta) \qquad \overline{A}(P) = 1.$$

En définissant maintenant les opérations $G(f(x))$ et ensuite $H(f(x))$ comme plus haut, nous vérifions sans peine que H jouit des propriétés 1) — 4) du théorème 19 et que (d'après (ζ), $\varrho(x)$ appartenant à P):

$$(\mu) \qquad H(\varrho(x)) = 1,$$

tandis que

$$(\nu) \qquad (L)\int_0^1 \varrho(x)\, dx = 0$$

(voir la dém. du th. 18). Le théorème 20 est ainsi établi.

Remarque I. On peut démontrer sans peine que pour les opérations $H(f(x))$ vérifiant les conditions 1) — 4) du théorème 19 subsiste la formule

$$H(f(x)) = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

lorsque $f(x)$ est intégrable R.

Observons à ce but d'abord que

$$\text{(i)} \qquad H(f(x)) = H(g(x)), \quad \text{si} \quad f(x) \sim g(x).$$

Il suffira évidemment démontrer qu'on a

$$\text{(ii)} \qquad H(\varphi(x)) = 0, \quad \text{si} \quad \varphi(x) \sim 0$$

et appliquer ensuite la propriété 1) de l'opération H.

Soit donc $\varphi(x) \sim 0$. Il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ une suite finie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telle qu'on a pour tout x l'inégalité

$$\text{(iii)} \qquad -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varrho(x + \alpha_k) \leqslant \varepsilon.$$

Or, d'après les propriétés 1) et 4) de l'opération H:

$$H\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x+\alpha_k)\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x+\alpha_k))=H(\varphi(x))$$

l'inégalité (iii) donne donc

$$-\varepsilon\leqslant H(\varphi(x))\leqslant\varepsilon.$$

Le nombre positif ε étant quelconque, cela prouve la formule (ii). La formule (i) est ainsi établie.

Or, lorsque $f(x)$ est intégrable R, on a (th. 17):

$$f(x)=c=\int_0^1 f(x)\,dx,$$

donc, d'après la propriété 3) de l'opération H:

$$H(f(x))=H(c)=c=\int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque II. En posant

$$\int_a^b f(x)\,dx=\begin{cases} H(\varphi(x)) & \text{pour } b\geqslant a\\ -H(\varphi(x)) & \text{pour } b<a,\end{cases}$$

où

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x) & \text{dans l'intervalle } (a,\ b)\\ 0 & \text{pour les autres } x,\end{cases}$$

et où H est une opération satisfaisant aux conditions du théorème 20, nous obtenons une intégrale satisfaisant aux conditions 1°—5° de M. Lebesgue énumérées dans l'Introduction, mais ne satisfaisant pas à la condition 6°.

En effet, d'après M. Lebesgue, les conditions 1°—6° caractérisent son intégrale, donc, l'intégrale que nous venons de définir satisfaisant aux conditions 1°—5° et ne coïncidant pas (pour les fonctions intégrables L) avec celle de M. Lebesgue (d'après (μ) et (ν)), elle ne peut pas satisfaire à la condition 6°.

Or, on pourrait sans peine démontrer directement que notre intégrale ne satisfait pas à la condition 6° pour les fonctions intégrables (L). En effet, la fonction $\varrho(x)$ étant nulle sauf dans un ensemble de mesure nulle, il existe une suite infinie d'intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ recouvrant E, dont la somme des longueurs est $\varepsilon<1$.

Soit $f(x)$ une fonction égale à 1 pour les x appartenant à un δ_i et à 0 pour les autres x. Nous aurons évidemment pour tout x

$$\varrho(x) \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

donc

$$H(\varrho(x)) \leqslant H(f(x)) \leqslant H(1) = 1,$$

et

$$H(f(x)) = 1 \qquad (\text{puisque } H(\varrho(x)) = 1).$$

Or, posons

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } x \text{ appartient à } \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n \\ 0 \text{ pour les autres } x; \end{cases}$$

nous aurons

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \dots$$

et la suite $f_n(x)$ converge évidemment (non uniformément) vers $f(x)$. Cependant

$$\lim_{n=\infty} H(f_n(x)) \leqslant \varepsilon < 1 = H(f(x)).$$

Le théorèmes démontrés nous permettent d'énoncer les propositions suivantes:

Théorème I. *On peut attacher à tout ensemble E de points d'une circonférence de rayon $\frac{1}{2\pi}$ un nombre $H(E)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) $H(E) \geqslant 0.$

2) $H(E_0) = 1$ *lorsque E_0 désigne l'ensemble de tous les points de la circonférence.*

3) $H(E_1 + E_2) = H(E_1) + H(E_2)$, *si* $E_1 E_2 = 0$.

4) $H(E_1) = H(E_2)$, *si* $E_1 \cong E_2$.

5) $H(E)$ *coïncide avec la mesure lebesguienne de l'ensemble E lorsque E est mesurable (L).*

Théorème II. *Il existe une fonction $H(E)$ vérifiant les conditions 1)—4) du théorème I et un ensemble W de mesure lebesguienne nulle, tels que $H(W) = 1$.*

Pour démontrer ces théorèmes, il suffit de poser

$$H(E) = H(f_E(x)),$$

où $f_E(x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble E (c'est-à-dire $f_E(x) = 1$ sur E et $= 0$ sur le complémentaire de E). Le théorème I résulte alors du théorème 19, et le théorème II — du théorème 20.

Remarque. Il n'y a aucune difficulté d'étendre les théorèmes I et II aux segments d'une droite (Il suffira d'observer à cet but que la circonférence est une courbe rectifiable).

Des théorèmes analogues subsistent pour le plan:

Théorème I*. *On peut attacher à toute fonction bornée $f(x, y)$ définie dans un domaine bornée, un nombre réel $H(f(x, y))$, satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *Lorsque $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ sont des fonctions bornées quelconques, définies dans le même domaine E, c_1 et c_2 deux nombres réels quelconques, on a:*

$$H(c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)) = c_1 H(f_1(x, y)) + c_2 H(f_2(x, y)).$$

2) *On a $H(f(x, y)) \geqslant 0$ pour $f(x, y) \geqslant 0$.*

3) *Lorsque $f(x, y) = c$ dans un carré K aux côtes 1, on a $H(f(x, y)) = c$.*

4) *Lorsque $f(x, y) \cong g(x, y)$* [1]*, nous avons $H(f(x, y)) = H(g(x, y))$.*

5) *Lorsque $f(x, y)$ est une fonction intégrable (L), on a*

$$H(f(x, y)) = \int\int_E f(x, y)\, dx\, dy.$$

Théorème II*. *Il existe une opération H satisfaisant aux conditions 1)—4) du théorème I* qui n'est pas identique avec l'intégrale de Lebesgue pour toutes les fonction mesurables (L).*

Théorème III*. *A tout ensemble borné E de points du plan peut être attaché un nombre $H(E)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) $H(E) \geqslant 0$.

2) $H(E) = 1$ *lorsque E est un carré de côté 1.*

3) $H(E_1 + E_2) = H(E_1) + H(E_2)$, *si* $E_1 E_2 = 0$.

4) $H(E_1) = H(E_2)$, *si* $E_1 \cong E_2$.

5) $H(E)$ *coïncide avec la mesure lebesguienne (superficielle) de l'ensemble E, lorsque E est mesurable (L).*

[1] Nous appelons *superposables* deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$, définies dans les ensembles E et E_1, lorsque $E \cong E_1$ et lorsqu'il existe une superposition de E et E_1, telle que dans les points correspondants les fonctions f et g ont des valeurs égales.

Théorème IV*. *Il existe une fonction $H(E)$ satisfaisant aux conditions 1) — 4) du théorème III* et un ensemble W de mesure lebesguienne (superficielle) nulle, tels que $H(W)=1$.*

Dém. Nous définirons comme il suit la fonction $H(f(x, y))$ du théorème I*. Considérons un cercle de rayon $\frac{1}{2\pi}$, ayant pour centre l'origine des coordonnées rectangulaires. $f(x, y)$ étant une fonction donnée, bornée et définie dans l'ensemble borné E, définissons une fonction $\varphi(\xi)$ sur la circonférence de notre cercle de la façon suivante.

Tournons les axes OX et OY d'un angle ξ et désignons par x', y' les nouvelles coordonnées. Nous aurons donc les formules

$$x=x' \cos \xi - y' \sin \xi, \quad y=x' \sin \xi + y' \cos \xi.$$

Envisageons la fonction

$$f_1(x', y')=f(x' \cos \xi - y' \sin \xi,\ x' \sin \xi + y' \cos \xi),$$

définie dans l'ensemble E_1 des points (x', y') qu'on obtient en tournant E autour d'origine des coordonnées de l'angle $-\xi$.

$H(\varphi(y'))$ désignant l'opération du théorème 19, définissons maintenant la fonction $g(x')$ d'une variable réelle x' comme il suit.

Soit a' un nombre réel donné. Si la droite $x'=a'$ a des points communs avec l'ensemble E_1, posons

$$g(a')=H(f_1(a', y')),$$

sinon, posons $g(a')=0$.

Posons maintenant

$$\varphi(\xi)=H(g(x')).$$

Définissons encore la fonction $\psi(x)$ pareillement comme $\varphi(\xi)$, en remplaçant seulement l'axe OX' par OY' et inversement (et en conservant les directions des axes).

Nous définissons maintenant l'opération $H(f(x, y))$ en posant

$$H(f(x, y))=\tfrac{1}{2}H[\varphi(\xi)+\psi(\xi)].$$

On vérifie sans peine que l'opération H ainsi définie satisfait à toutes les conditions du théorème I*. Quant au théorème III*, le raisonnement est analogue.

Pour les théorèmes II* et IV*, je donne ici seulement une esquisse d'une démonstration.

Considérons un corps d'hyperfonctions $\Omega(F)$, tel que

1) Toute hyperfonction du corps $\Omega(R)$ appartient à $\Omega(F)$.

2) Toute fonction $\chi(x)$ qui est égale à 1 dans un ensemble de première catégorie de M. Baire et de mesure nulle, et qui est nulle dans le complémentaire de cet ensemble, appartient à une hyperfonction F du corps $\Omega(F)$.

3) Le corps $\Omega(F)$ est le plus petit satisfaisant aux conditions 1) et 2).

Définissons l'opération $A(X)$ dans le corps $\Omega(F)$, en posant

$$A(X) = (L)\int_0^1 f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est une fonction intégrable (L), contenue dans X. Or, désignons par P la même hyperfonction que dans la démonstration du théorème 20, posons $\Omega_1 = \Omega(F, P)$ et définissons l'opération $A_1(X)$ dans Ω_1, ensuite l'opération $\bar{A}(X)$ dans le corps de toutes les hyperfonctions et enfin l'opération $H(f(x))$ d'une façon analogue comme dans la démonstration du théorème 20.

On pourrait démontrer que toute fonction $\sigma(x)$ qui est $=1$ dans un certain ensemble E de mesure nulle, dont le complémentaire est de 1re catégorie de M Baire, et qui est nulle dans le complémentaire de cet ensemble, vérifie l'inégalité

$$H(\sigma(x)) = 1.$$

Il est en effet $\varrho(x) - \sigma(x) = \pm 1$ dans un ensemble de première catégorie et de mesure nulle, et $\varrho(x) - \sigma(x) = 0$ dans le complémentaire de cet ensemble. Par conséquent l'hyperfonction F contenant la fonction $\varrho(x) - \sigma(x)$ appartient à $\Omega(F)$, don $H(\varrho(x) - \sigma(x)) = 0$, ce qui donne

$$H(\sigma(x)) = 1.$$

Ceci posé, considérons l'ensemble plan W formé des segments de longueur 1, perpendiculaires à l'axe d'abscisses dans les points de l'ensemble E défini plus haut. En définissant l'opération H comme dans le théorème I*, on arrive sans peine aux théorèmes II* et IV*.