Un lemme métrique.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Je prouverai dans cette Note un lemme métrique, utile dans plusieurs démonstrations et présentant une généralisation aux ensembles linéaires bornés quelconques (même non mesurables) d'un lemme démontré par MM. Young pour les ensembles fermés[1]).

Lemme: *Soit E un ensemble linéaire borné et soit $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles, telle que tout point x de E est une extrémité gauche d'un au moins intervalle $\delta(x)$ de la famille $\mathcal{F}$;*

Thèse: *ε étant un nombre positif donné quelconque, il existe toujours un nombre fini $N = N(\varepsilon)$ d'intervalles $\delta(x_1), \delta(x_2), \dots \delta(x_N)$ de la famille $\mathcal{F}$, n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que la mesure extérieure (lebesguienne) de l'ensemble de ces points de E qui n'appartiennent à aucun d'intervalles $\delta(x_1), \delta(x_2), \dots, \delta(x_N)$ est $< \varepsilon$.*

Démonstration. Désignons par E_n l'ensemble de tous les points x de E pour lesquels il existe au moins un intervalle $\delta(x)$ de la famille $\mathcal{F}$ ayant x pour extrémité gauche et de longueur $> \frac{1}{n}$. Nous aurons évidemment

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots$$

et

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots,$$

ce qui entraîne, comme on sait:

$$m_e(E) = \lim_{n=\infty} m_e(E_n),$$

[1]) W. H. and G. C. Young: *On the existence of a differential coefficient* Proc. Lond. Math. Soc. 2 Ser. Vol. 9.

donc, pour un nombre k suffisamment grand:

(1) $$m_e(E) - m_e(E_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit a_1 la borne inférieure de l'ensemble E_k, b_1 — sa borne supérieure, $l = b_1 - a_1$. Posons

(2) $$\eta = \frac{\varepsilon}{2(kl+1)}.$$

a_1 étant la borne inférieure de l'ensemble E_k, il existe un point x_1 de E_k tel que $a_1 \leqslant x_1 < a_1 + \eta$. Soit $\delta(x_1) = (x_1, x_1 + h_1)$ l'intervalle de la famille $\mathcal{F}$ de longueur $h_1 > 1/k$ (un tel intervalle existe, x_1 étant un point de E_k).

S'il existe des points x de E_k tels que $x \geqslant x_1 + h_1$, soit a_2 leur borne inférieure: il existe alors un point x_2 de E_k tel que $a_2 \leqslant x_2 < a_2 + \eta$ et un intervalle $\delta(x_2) = (x_2, x_2 + h_2)$ de $\mathcal{F}$ de longueur $h_2 > 1/k$. S'il existe des points x de E_k tels que $x \geqslant x_2 + h_2$, on arriverait de la même façon à l'intervalle $\delta(x_3)$ et ainsi de suite.

Les intervalles $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$, ... ainsi obtenus étant tous de longueur $> 1/k$ et l'ensemble E_k étant borné, la suite d'intervalles $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$,... est nécessairement finie. Soit $\delta(x_N) = (x_N, x_N + h_N)$ le dernier intervalle de cette suite: nous aurons évidemment $x_N \leqslant b_1 \leqslant x_N + h_N$.

Les intervalles $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$, ..., $\delta(x_{N-1})$ de longueur respec. $h_1, h_2, \ldots h_{N-1}$ étant tous situés dans l'intervalle (a_1, b_1) de longueur l et n'empiétant pas les uns sur les autres, on a

(3) $$h_1 + h_2 + \ldots + h_{N-1} < l$$

Or, nous avons

$$h_i > 1/k, \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

donc, d'après (3)

$$\frac{N-1}{k} < l,$$

c'est-à-dire

(4) $$N < kl + 1$$

Désignons par S l'ensemble-somme des intervalles fermés

(5) $$\delta(x_1), \delta(x_2), \ldots, \delta(x_N)$$

et par F l'ensemble-somme des intervalles fermés

(6) $$d(x_i) = (x_i - \eta, x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Il résulte sans peine de la définition des intervalles (5) que

$$E_k \subset S + T;$$

or $E_k \subset E$: donc

$$E_k \subset E(S+T)$$

et

(7) $$m_e(E_k) \leqslant m_e[E(S+T)].$$

Or, l'ensemble $S+T$ étant mesurable, nous avons

$$m_e(E) = m_e[E(S+T)] + m_e[E-(S+T)],$$

donc, d'après (7) et (1):

$$m_e[E-(S+T)] \leqslant m_e(E) - m_e(E_k) < \varepsilon/2,$$

ce qui donne, d'après $E - S \subset [E-(S+T)] + T$:

$$m_e(E-S) \leqslant m_e[E-(S+T)] + m(T) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

puisque, d'après (6), (4) et (2) (vu la définition de l'ensemble T):

$$m(T) \leqslant N\eta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les intervalles (5) satisfont donc aux conditions de notre lemme qui est ainsi établi.

La Note de MM. **Rajchman** et **Saks** (voir ce volume, p. 204) contiendra des applications intéressantes de notre lemme.