Sur le terme primitif de la Logistique.

Par

Alfred Tajtelbaum (Varsovie).

Je me propose dans cette Note d'établir un théorème de la Logistique concernant des rapports, inconnus jusqu'à présent, qui existent entre les termes de cette discipline. Mes raisonnements sont basés sur des propositions généralement admises par les logisticiens. Cependant je ne les fais pas dépendre de telle ou autre théorie des types logiques; d'ailleurs, parmi toutes les théories des types qui peuvent être construites [1]) il en existe de telles, par rapport auxquelles mes raisonnements, dans leur forme actuelle, sont parfaitement légitimes [2]).

Le problème dont je présente la solution est le suivant: *est-il possible de construire un système de la Logistique, en admettant le signe d'équivalence comme le* **seul** *terme primitif* (bien entendu, outre les quantificateurs [3]))?

Ce problème me paraît intéressant pour la raison que voici. On sait qu'il est possible de construire le système de la Logistique moyennant un seul terme primitif, soit en employant comme tel le signe d'implication, si l'on veut suivre la voie de M. Russell [4]),

[1]) La possibilité de construire des différentes théories des types logiques est reconnue également par l'inventeur de la plus connue d'entre elles. Cf. A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge 1910, p. VII.

[2]) Une telle théorie a été développée en 1920 par M. le Professeur S. Leśniewski dans son cours des Principes d'Arithmétique à l'Université de Varsovie.

[3]) Au sens de Peirce (*On the Algebra of Logic*, American Journal of Mathematics, vol. VII, 1885, p. 197) qui appelle ainsi les symboles „Π" (quantificateur général) et „Σ" (quantificateur particulier) représentant les abréviations des expressions: „*pour toute signification des termes*..." et „*pour quelque signification des termes*..."

[4]) B. Russell, *The Principles of Mathematics*, Cambridge 1903, p. 16—18.

soit en se servant de l'idée de M. Sheffer [1]), qui admet comme terme primitif le signe d'incompatibilité, spécialement introduit à cet effet. Or, pour parvenir réellement à ce but, il faut se garder de faire entrer dans les énoncés des définitions un terme constant spécial, distinct à la fois du terme primitif adopté, des termes préalablement définis et du terme à définir [2]). Le signe d'équivalence, si on l'emploie comme terme primitif, présente à ce point de vue cet avantage, qu'il permet d'observer strictement la règle précédente et de donner en même temps aux définitions une forme aussi naturelle que commode, c'est à-dire la forme d'équivalence.

Le théorème, qui va être démontré (Th. 10), présente une solution affirmative du problème considéré. Il peut servir, en effet, comme définition du signe de la multiplication logique par le signe d'équivalence et par le quantificateur général. Or, lorsqu'on opère déjà avec le signe de la multiplication logique, les autres termes de Logistique peuvent être facilement définis à l'aide des propositions suivantes [3]):

$$[p] :. \sim (p) . \equiv : p \equiv . [q] . q$$
$$[p, q] :. p \supset q . \equiv : p \equiv . p . q$$
$$[p, q] : p \vee q . \equiv . \sim (p) \supset q \text{ [4])}$$

Je commencerai mon raisonnement par l'introduction de deux définitions auxiliaires: Déf. 1 et Déf. 2; je démontrerai ensuite les lemmes Th. 1—9 et enfin le Th. 10. Les démonstrations que je présente ne sont, bien entendu, qu'incomplètes: il faut les regarder

[1]) Sheffer, *A set of five postulates for Boolean algebras with application to logical constants*, Transactions of the American Mathematical Society, 1913. Voir aussi: B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, London-New York 1920, p. 144 et suivantes.

[2]) MM. A. N. Whitehead et B. Russell dans leur ouvrage précité se placent à un point de vue tout à fait différent: ils mettent leurs définitions sous la forme „$A = B$ Df." contenant un terme qui ne figure ni dans les axiomes ni dans les théorèmes du système.

[3]) J'adopte dans cette Note les notations des MM. Whitehead et Russell avec quelques légères modifications; en particulier, au lieu des expressions de la forme „φx" j'écris „$\varphi(x)$".

[4]) Les termes „0" et „1" qui figurent p. ex. chez L. Couturat, *L'Algèbre de la Logique*, Paris 1905, peuvent être définis comme suit:

$$0 \equiv . [q] . q$$
$$1 \equiv . [q] . q \equiv q$$

plutôt comme des commentaires, indiquant la marche du raisonnement. La structure de ces commentaires est empruntée partiellement à MM. Whitehead et Russell; elle n'éxige, il me semble, d'explications plus détaillées.

Déf. 1. $[p] \cdot \varphi(p) \equiv p$

Déf. 2. $[p] : \psi(p) \equiv . p \equiv p.$

Th. 1. $[p] \cdot \sim([q] \cdot p \equiv \varphi(q))$

Dém.

$[p] \cdot$

(1) $\sim(p \equiv \sim(p)) \cdot$

(2) $\sim([q] \cdot p \equiv q) \cdot$ (1)

(3) $\sim([q] \cdot p \equiv \varphi(q))$ (2, **Déf. 1**)

Th. 2. $[p, q] : [r] \cdot p \equiv \varphi(r) . \equiv . [r] \cdot q \equiv \varphi(r)$

Dém.

$[p, q] :$

(1) $\sim([r] \cdot p \equiv \varphi(r)) \cdot$ (**Th. 1**)

(2) $\sim([r] \cdot q \equiv \varphi(r)) :$ (**Th. 1**)

(3) $[r] \cdot p \equiv \varphi(r) . \equiv . [r] \cdot q \equiv \varphi(r)$ (1, 2)

Th. 3. $[p] : [q] \cdot p \equiv \psi(q) . \supset p$

Dém.

$[p] : [q] \cdot p \equiv \psi(q) . \supset .$

(1) $p \equiv \psi(p)$

(2) $p \equiv p \cdot$

(3) $\psi(p) \cdot$ (**Déf. 2**, 2)

(4) $p \cdot$ (1, 3)

Th. 4. $[p, q] : p \supset . p \equiv \psi(q)$

Dém.

$[p, q] : p \supset .$

(1) $p \cdot$

(2) $q \equiv q \cdot$

(3) $\psi(q) \cdot$ (**Déf. 2**, 2)

(4) $p \equiv \psi(q)$ (1, 3)

Th. 5. $[p] : [q] \cdot p \equiv \psi(q) . \equiv p$ (**Th. 3**, **Th. 4**)

Th. 6. $[p, q, f] :: p \cdot q . \supset :. p \equiv : [r] \cdot p \equiv f(r) . \equiv . [r] \cdot q \equiv f(r)$

Dém.

$[p, q, f] :: p \,.\, q \,.\supset :.$

(1) $p \,.$

(2) $q \,.$

(3) $p \equiv q :.$ (1, 2)

(4) $[r] : p \equiv r \,.\equiv .\, q \equiv r :.$ (3)

(5) $[r] : p \equiv f(r) \,.\equiv .\, q \equiv f(r) :.$ (4)

(6) $[r] : p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r) :.$ (5)

(7) $p \equiv : [r] \,.\, p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r)$ (1, 6)

Th. 7. $[p, q] :: [f] :.\, p \equiv : [r] \,.\, p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r) :.\supset p$

Dém.

$[p, q] :: [f] :.\, p \equiv : [r] \,.\, p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r) :.\supset :.$

(1) $p \equiv : [r] \,.\, p \equiv \varphi(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv \varphi(r) :.$

(2) $[r] \,.\, p \equiv \varphi(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv \varphi(r) :$ (Th. 2)

(3) p (1, 2)

Th. 8. $[p, q] :: [f] :.\, p \equiv : [r] \,.\, p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r) :.\supset q$

Dém.

$[p, q] :: [f] :.\, p \equiv : [r] \,.\, p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r) :.\supset :.$

(1) $p \equiv : [r] \,.\, p \equiv \psi(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv \psi(r)$

(2) $[r] \,.\, p \equiv \psi(r) \,.\equiv p :$ (Th. 5)

(3) $[r] \,.\, q \equiv \psi(r) \,.\equiv q :$ (Th. 5)

(4) $p \equiv .\, p \equiv q :$ (1, 2, 3)

(5) $p \equiv p \,.\equiv q :$ (4) [1]

(6) $p \equiv p \,.$

(7) q (5, 6)

Th. 9. $[p, q] :: [f] :.\, p \equiv : [r] \,.\, p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r) :.\supset .\, p \,.\, q$
(Th. 7, Th. 8)

Th. 10. $[p, q] :: p \,.\, q \,.\equiv :.\, [f] :.\, p \equiv : [r] \,.\, p \equiv f(r) \,.\equiv .\, [r] \,.\, q \equiv f(r)$
(Th. 6, Th. 9)

En terminant je signalerai encore une définition et un théorème qui se rattachent au Th. 10.

Déf. 3. $E \equiv : [p, q, f] : p \equiv q \,.\, f(p) \,.\supset f(q)$

[1]) Je passe de (4) à (5) en me basant sur le théorème suivant qui me fut communiqué obligeamment par M J. Łukasiewicz:

$$[p, q, r] :.\, p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : p \equiv q \,.\equiv r.$$

Je ne donne pas ici la démonstration, d'ailleurs très facile, de ce théorème qui exprime une propriété intéressante de l'équivalence (analogue à la propriété associative de l'addition et de la multiplication logiques).

La proposition qui forme le membre droit de cette définition exprime que toute fonction ayant pour argument une proposition est une *truth-function* au sens de MM. Whitehead et Russell [1].

Th. 11. $E \supset :. \,]p, q] :. p \,.\, q \,. \equiv : [f] : p \equiv . f(p) \equiv f(q).$

La démonstration de ce théorème est en points principaux analogue à celle du Th. 10; c'est pourquoi je ne la présente pas ici.

Le Th. 11 montre que dans des systèmes qui comptent la proposition:

$$[p, q, f] : p \equiv q \,.\, f(p) \,.\supset .\, f(q)$$

parmi leurs axiomes ou théorèmes, le Th. 10 de cette Note peut être remplacé par une proposition beaucoup plus simple et jouant le même rôle.

[1] A. N. Whitehead and B. Russell, op. cit., p. 120–121.