Sur la nature des fonctions à carré sommable et des ensembles mesurables.

Par

A. Besikovitch (Petrograde).

§ 1. Au cours de ses recherches sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence presque partout des séries de Fourier-Lebesgue, M. Lusin avait obtenu le théorème suivant:

Quelle que soit une fonction $f(x)$ à carré sommable qu'on suppose définie aux points de l'intervalle $(0, 1)$ *et nulle ailleurs*[1], *l'intégrale*

$$q(x) = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha$$

considérée comme $\lim\limits_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^1$, *est finie presque partout dans* $(0, 1)$ *et représente une fonction de* x *à carré sommable.*

La démonstration de M. Lusin fait appel aux méthodes des variables complexes et au théorème de Riesz-Fischer.

Le théorème en question permet de pénetrer très profondemment dans la nature des fonctions à carré sommable, d'ailleurs l'importance de ce théorème s'accroit, si l'on remarque qu'il existe bien de fonctions f, telles que l'intégrale (prise au sens de M. Lebesgue)

$$\int_0^1 \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha$$

est infinie aux points d'un ensemble de mesure non nulle. Ainsi l'existence de l'intégrale

[1]) Pour déterminer $q(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$, il faut connaître $f(x)$ pour $-1 < x < 2$.

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha$$

ne résulte nullement de la petitesse en valeur absolue de l'expression sous le signe $\int$, c'est à une certaine interférence des valeurs positives et négatives, que présente l'expression

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}$$

au voisinage du point $\alpha = 0$, que cette existence est due.

Si l'on fait $f(x)=1$ quand x appartient à un certain ensemble mesurable E, en convenant de poser $f=0$ ailleurs, le théorème de M Lusin exprime une propriété géométrique remarquable des ensembles mesurables.

Je trouve, dans le présent article, une limite supérieure pour l'intégrale $\int_0^1 [q(x)]^2 dx$, et je donne une démonstration du théorème cité, en me servant d'une méthode des variables réelles qui permet de voir quelles sont les propriétés des fonctions et des ensembles desquelles résulte le théorème en question.

§ 2. **Lemme I.** *Soit* $s_i = i - \frac{1}{2}$, $m_i \geqq 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$; *alors on aura*

$$(1) \qquad \sum_{l=1}^{l=n}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{m_i}{s_i - l}\right)^2 < \pi^2 \sum_{i=1}^{n} m_i^2$$

En effet, on a:

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{s_i-l}\right)^2 = \sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2}{(s_i-l)^2} + 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\frac{m_i}{s_i-l}\cdot\frac{m_j}{s_j-l}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \cdot \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(s_i-l)^2} + 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} m_i \cdot m_j \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(s_i-l)(s_j-l)},$$

mais

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(s_i-l)^2} = \frac{1}{(l-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(l-1-\frac{1}{2})^2} + \ldots + \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} +$$

$$+ \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} + \ldots + \frac{1}{(n-l-\frac{1}{2})^2} <$$

$$< 2\left[\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{1}{(\frac{5}{2})^2} + \ldots\right] = 8\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \pi^2,$$

par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(s_i-l)^2} < \pi^2 \sum_{i=1}^{n} m_i^2.$$

Ensuite

$$\frac{1}{(l-s_i)(l-s_j)} + \frac{1}{s_i-s_j}\left(\frac{1}{l-s_i}-\frac{1}{l-s_j}\right),$$

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(l-s_i)(l-s_j)} = \frac{1}{s_i-s_i}\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l-s_i} - \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l-s_j}\right] =$$

$$= \frac{1}{s_i-s_j}\left[\sum_{l=1-s_i}^{n-s_i}\frac{1}{l} - \sum_{n=1-s_j}^{n-s_j}\frac{1}{l}\right] = \frac{1}{s_i-s_j}\left[\sum_{l=n\;\;s_j+1}^{n-s_i}\frac{1}{l} - \sum_{l=1-s_j}^{n-s_i}\frac{1}{l}\right] =$$

$$= \frac{1}{s_i-s_j}\left[\sum_{l=n-s_j+1}^{n-s_i}\frac{1}{l} + \sum_{l=s_i}^{s_j-1}\frac{1}{l}\right] < 0,$$

$$2\sum_{1\leq i<j\leq n} m_i m_j \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(s_i-l)(s_j-l)} < 0,$$

ce qui démontre le lemme.

Convenons d'appeler *moment* du segment $(a-1, b)$ l'expression $\sum_{i=a}^{i=b} m_i^2$; en posant

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{s_i-l} = \Phi(l) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i^2 = n\, M^2,$$

le lemme démontré s'exprime par l'inégalité suivante:

$$\sum_{l=1}^{n} [\Phi(l)]^2 < n\,\pi^2 M^2$$

Corollaire 1. L'inégalité

$$|\Phi(l)| > A$$

ne peut avoir lieu qu'en $\dfrac{n\pi^2 M^2}{A^2}$ points au plus.

§ 3. Supposons que l puisse prendre toutes les valeurs entières positives de 1 à n, $m(l)$ prenant des valeurs entières positives dépendant d'une certaine façon de n. Posons:

$$\sum{}' \frac{m_i}{s_i - p} = \Psi(p, l), \quad \sum{}'' \frac{m_i}{s_i - p} = \Omega(p, l),$$

où p désigne un entier quelconque satisfaisant à la double inégalité

$$l - m(l) < p < l + m(l),$$

la sommation Σ' étant étendue aux valeurs de i telles que

$$l - m(l) < i \leqslant l + m(l),$$

et la sommation $\underset{i}{\Sigma''}$ portant sur les autres valeurs de i; on a

(2) $$\Phi(p) = \Psi(p, l) + \Omega(p, l).$$

On conviendra de prendre $m(l)$ tel que $|\Psi(l, l)|$ soit maximum.

Lemme 2. *Si $k > 516$, l'inégalité*

$$|\Psi(l, l)| > \pi M k$$

ne peut être vérifiée que par un nombre inférieur à nk^{-1} des valeurs de l.

Supposons remplies simultanément les inégalités suivantes:

(3) $$\Psi(l, l) > \pi M k \quad \text{et} \quad |\Phi(l)| < \tfrac{1}{2}\pi M k$$

alors on aura:

$$\Omega(l, l) < -\tfrac{1}{2}\pi M k;$$

mais $\Omega(p, l)$ étant une fonction croissante en p, on a aussi

(4) $$\Omega(p, l) < -\tfrac{1}{2}\pi M k$$

avec $p < l$; d'où l'on tire, en vertu de l'égalité (2), que pour $l - m(l) < p < l$ on aura, soit

(5) $$|\Phi(p)| > \tfrac{1}{4}\pi M k,$$

soit

(6) $$\Psi(p, l) > \tfrac{1}{4}\pi M k.$$

A tout point l, donnant lieu aux inégalités (3), faisons correspondre l'intervalle $C(l)$: $(l - m(l), l + m(l))$; convenons de dire que les points de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$ appartenant (au sens étroit) à l'un au moins des intervalles $C(l)$, forment le système C.

Prenons parmis les intervalles $C(l)$ celui dont l'extrémité inférieure est le plus à la gauche; s'il y a plusieurs de tels intervalles, prenons parmis eux le plus petit; désignons cet intervalle par D_1.

S'il y a, parmis les intervalles restants, des intervalles dont les extrémités gauches sont sur D_1, prenons parmis ceux-là l'intervallo à l'éxtrémité gauche le plus à la droite; s'il y a plusieurs de tels intervalles, choisissons parmis eux le plus grand; l'intervalle qu'on vient de déterminer sera désigné par D_2. S'il n'y a pas d'intervalles ayants leurs extrémités gauches sur D_1, l'intervalle D_2 sera celui des intervalles situés à la droite de D_1, qui a son extrémité gauche le plus à la gauche, et s'il y en a plusieurs, ce sera le plus petit d'entre eux. En procédant de cette sorte on déterminera des intervalles $D_1, D_2, \dots$, recouvrant tous les points du système C. Il n'y a pas de points appartenants à la fois aux trois intervalles consécutifs D_i, D_{i+1}, D_{i+2} quelconques. Le système formé d'intervalles

$$D_1, D_3, D_5, \dots$$

n'empiétants pas, sera désigné par D'; celui des intervalles

$$D_2, D_4, D_6, \dots$$

étant désigné par D''.

Partageons les intervalles D' en deux groupes A' et B', et les intervalles D'' en deux groupes A'', B'' de la façon suivante: l'intervalle D_i appartient au groupe A ou B, suivant que l'inégalité (5) est verifiée en un nombre de points de cet intervalle non inférieur à $\frac{m(l)}{2}$, ou bien en un nombre inférieur à cette quantité.

L'inégalité (5) ne pouvant être remplie, en vertu du corollaire 1, qu'en $16nk^{-2}$ points au plus, cette même inégalité étant vérifiée dans tout intervalle du groupe A' en un nombre de ses points surpassant un quart du nombre de tous les points c appartenants à cet intervalle, on voit que le groupe A' ne peut contenir que $64nk^{-2}$ points au plus. Même remarque relative au groupe A''.

Dans tout intervalle $[l-m(l), l+m(l)]$ du groupe B', l'inégalité (6) se trouve vérifiée en un nombre $\geqq \frac{m(l)}{2}$ de points, parsuite le moment de cet intervalle ne peut être inférieur à

$$\frac{\frac{m(l)}{2}\cdot\frac{1}{16}\pi^2 M^2 k^2}{\pi^2} = \frac{m(l)}{32} M^2 k^2;$$

ainsi, le moment d'un intervalle appartenant au groupe B' et de longueur $2m(l)$ n'est pas inférieur à $\frac{m(l)}{32}M^2k^2$; la somme des moments de tous les intervalles du groupe B' ne peut évidemment surpasser le moment de l'intervalle $(0, n)$, qui vaut nM^2, par conséquent l'étendue de tous les intervalles du groupe B', aussi bien que le nombre des points qu'ils recouvrent, ne surpassera pas $64\,nk^{-2}$; remarque analogue relativement au groupe B''.

Ainsi, le système C ne contient que $256\,nk^{-2}$ points au plus; et il est évident, alors, que les inégalités (3) ne peuvent avoir lieu qu'en $256\,nk^{-2}$ points au plus.

De même, les inégalités

$$(7) \qquad \Psi(l, l) < -\pi Mk \quad \text{et} \quad |\Phi(l)| < \tfrac{1}{2}\pi Mk$$

n'auront lieu qu'en $256\,nk^{-2}$ points tout au plus; les inégalités

$$(8) \qquad |\Psi(l, l)| > \pi Mk, \quad |\Phi(l)| < \tfrac{1}{2}\pi Mk$$

ne seront satisfaites qu'en $512nk^{-2}$ points au plus.

Ensuite, en vertu du corollaire 1, l'inégalité

$$|\Phi(l)| \geqq \tfrac{1}{2}\pi Mk$$

n'a lieu qu'en $4nk^{-2}$ points au plus, d'où il résulte que le système d'inégalités

$$|\Psi(l, l)| > \pi Mk \quad \text{et} \quad |\Phi(l)| \geqq \tfrac{1}{2}\pi Mk$$

ne sera vérifié qu'en $4nk^{-2}$ points au plus, et l'inégalité

$$|\Psi(l, l)| > \pi Mk$$

n'aura lieu, à son tour, qu'en $516nk^{-2} < nk^{-1}$ points au plus, ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque. si $m_i = m_{i+1} = \ldots = m_{k-1} = 0$, la somme $\Phi(p)$ est comprise entre les limites

$$\Phi(k) \leqq \Phi(p) \leqq \Phi(i),$$

quelle que soit la valeur réelle de p dans l'intervalle (i, k); dans ces mêmes conditions la fonction $|\Psi(p, p)|$ ne saura surpasser le plus grand des deux nombres $|\Psi(i, i)|$ et $|\Psi(k, k)|$.

§ 4. Soit E un ensemble mesurable quelconque situé sur $(0, 1)$; définissons une fonction $f(x)$ en convenant de poser $f = 1$ en tout point de E et $f = 0$ ailleurs.

Théorème 1. *L'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

considérée comme $\lim\limits_{\varepsilon=0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}$, *est finie presque partout dans* (0, 1).

Soit m la mesure de l'ensemble E; le théorème est évident aux cas $m=0$ et $m=3$ [1]); considérons un système L' d'intervalles n'empiétant pas, enfermant l'ensemble E, ce système étant encore assujetti à cette condition que la somme des longueurs de tous ses intervalles ne surpasse $m+\frac{\varepsilon}{6}$, ε positif, aussi petit que l'on veut, étant donné d'avance.

Donnons nous un nombre positif k supérieur à 518; retranchons du système L un nombre fini d'intervalles L'_0 de façon à avoir [2]) $L'-L'_0<\frac{1}{k^4}$; parmis les intervalles restants prenons en un nombre fini, soient L'_1 ces intervalles, de façon à avoir $L'-L'_0-L'_1<\frac{1}{k^8}$; de même on choisira parmis les intervalles, restants après cette opération, des intervalles L_2 de façon à avoir $L'-L'_0-L'_1-L'_2<\frac{1}{k^{12}}$ et ainsi de suite.

On obtient alors

$$L'=L'_0+L'_1+L'_2+\dots,$$

où $L'_i<\frac{1}{k^{4i}}$, tout système L'_i ne contenant qu'un nombre fini d'intervalles. Les portions de l'ensemble E qui sont recouvertes par les intervalles du système L'_i, seront désignées par E_i; ce qui donne

$$E=E_0+E_1+E_2+\dots;$$

$f_i(x)$ étant une fonction nulle hors de l'ensemble E_i et ayant la valeur *un* aux points de cet ensemble, on a évidemment:

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\dots$$

Soit j_i le nombre d'intervalles formant le système L'_i; élargissons

[1]) Cf. note d'en bas de la page 1.

[2]) Nous écrirons pour abréger: „L'" au lieu de: „longueur totale des intervalles formant L'" ou „mesure de L'".

chaque intervalle du système L'_i de ε_i de chaque côté, de façon que $L'_i + 2j_i\varepsilon_i$ ne surpasse pas $\frac{1}{4^{ki}}$ et que

$$2j_0\varepsilon_0 + 2j_1\varepsilon_1 + 2j_2\varepsilon_2 + \ldots < \frac{\varepsilon}{6}.$$

En désignant par L_i le système d'intervalles élargis qui appartenaient à L'_i, on a évidemment l'inégalité:

$$L_0 + L_1 + L_2 + \ldots < m + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Soit a un nombre positif quelconque ne surpassant pas 1. Quelle que soit la valeur de x dans le système L_μ, l'intégrale

$$\int_0^a \frac{f_\mu(x+\alpha) - f_\mu(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha$$

est finie. Il s'agit maintenant d'évaluer sa grandeur; à cet effet procédons de la façon suivante: partageons l'intervalle $(0, 1)$ en n_μ intervalles partiels égaux de telle sorte que chacun d'eux soit de longueur $< \frac{\varepsilon_\mu}{k^\mu + 2}$; en désignant par h la longueur d'un tel intervalle, posons $h = \frac{1}{n_\mu}$. Remarquons maintenant que, pour les valeurs considérées de x, on a:

$$\int_0^a \frac{f_\mu(x+\alpha) - f_\mu(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_{x-a}^{x+a} \frac{f_\mu(\alpha)}{\alpha - x}\, d\alpha = \tag{10}$$

$$\sum{}' \int_{(i-1)h}^{ih} \frac{f_\mu(\alpha)}{\alpha - x}\, d\alpha + \eta_1,$$

la sommation Σ' étant étendue à tous les intervalles appartenants à l'intervalle de l'intégration $(x-a, x+a)$ le terme η_1 désignant la partie restante de l'intégrale, étendue aux intervalles partiels empiétant sur $(x-a, a+x)$ sans y être contenus complètement, s'il en existe de tels intervalles, bien entendu Donc

$$|\eta_1| < \frac{2}{k^\mu}. \tag{11}$$

Remarquons encore qu'on a

$$\sum{}' \int_{(i-1)h}^{ih} \frac{f_\mu(\alpha)}{\alpha - x}\, d\alpha = \sum{}' \frac{e_i}{\sigma_i - x} = \sum{}' \frac{n_\mu e_i}{n_\mu\sigma_i - n_\mu x}, \tag{12}$$

e_i étant le mesure de la partie de l'ensemble E_μ contenue dans le i-ème intervalle ($e_i \leqq h$) et σ_i désignant une quantité satisfaisant à l'inégalité

$$(i-1)h < \sigma_i < ih.$$

En posant

$$n_\mu l_i = m_i, \; n_\mu \sigma_i = s_2', \quad n_\mu x = l$$

on aura $i - 1 < s_i' < i$; l peut différer de l'indice de l'intervalle partiel contenant x, d'une quantité négative inférieure en valeur absolue à 1; puis $m_i \leqq 1$.

On tire de l'égalité (12) la relation

$$\sum{}' \int_{(i-1)h}^{ih} \frac{f(\alpha)}{\alpha - x}\, d\alpha = \sum{}' \frac{m_i}{s_i' - l} = \sum{}' \frac{m_i}{s_i' - l} + \eta_2 \tag{13}$$

où l'on a posé

$$s_i = i - \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \sum{}' \frac{m_i(s_i - s_i')}{(s_i' - l)(s_i - l)}.$$

Faisons maintenant les remarques suivantes: x étant étranger à L_μ, la distance de x à l'ensemble E_μ surpasse $\varepsilon_\mu > (k^\mu + 2)h$; dans $k^\mu + 1$ intervalles au moins, voisins à l'intervalle contenant x, on a $m_i = 0$; ensuite, $|s_i - s_i'| < \frac{1}{2}$ et, enfin, $s_i - l$ et $s_i' - l$ surpassent en modules le nombre des intervalles entre le i-éme et celui qui contient le point x.

Donc

$$|\eta_2| < \frac{1}{(k^\mu + 1)^2} + \frac{1}{(k^\mu + 2)^2} + \cdots < \frac{1}{k^\mu}$$

et aussi:

$$|\eta_1 + \eta_2| < \frac{3}{k^\mu}. \tag{14}$$

Remarquons maintenant que l'expression

$$\sum{}' \frac{m_i}{s_i - l}$$

n'est autre chose que l'expression que nous avons désigné au § 3 par $\Psi(l, l)$. La valeur de $m(l)$ dans le cas actuel est entièrement déterminée par celles de a et de x, a ne rendant pas ici $\Psi(l, l)$ maximum, ce qui avait lieu au paragraphe cité.

Quant au moment de l'intervalle $(0, n_\mu)$, on remarquera que de l'inégalité:

$$n_\mu M^2 = \Sigma' m_i^2 \leqq \Sigma m_i' < \frac{n_\mu}{k^{4\mu}}$$

on tire

$$M < \frac{1}{k^{2\mu}}. \tag{15}$$

Donc, en vertu de (10), (12), (13) et (14), on a

$$\int_0^a \frac{f_\mu(x+\alpha) - f_\mu(x-\alpha)}{\alpha} d\alpha = \Psi(l, l) + \frac{3\theta}{k^\mu}, \quad \text{avec } -1 < \theta < +1 \tag{16}$$

En vertu du lemme 2, l'inégalité

$$|\Psi(l, l)| > \pi M k^\mu$$

ne peut être satisfaite qu'en $n_\mu k^{-\mu}$ points au plus, et en vertu de (15) l'inégalité

$$|\Psi(l, l)| > \pi k^{-\mu} \tag{17}$$

n'est vérifiée qu'en $n_\mu k^{-\mu}$ points au plus.

Remarquons maintenant qu'en vertu de la remarque qui termine le § 3, l'inégalité (17), quand x est étranger à L_μ, ne saurait être vérifiée par des valeurs fractionnaires de $l = n_\mu x$ qu'au seul cas où cette inégalité serait satisfaite par l'un au moins des entiers les plus voisins de x. De là on conclut que les valeurs de x étrangers à L_μ et satisfaisantes à l'inégalité (17) appartiennent à $2 n_\mu k^{-\mu}$ intervalles partiels au plus, donc la mesure de l'ensemble de ces valeurs de x ne saurait surpasser $2 n_\mu k^{-\mu} h = 2 k^{-\mu}$. Par conséquent, en vertu de (16), l'inégalité

$$\left| \int_0^a \frac{f_\mu(x+\alpha) - f_\mu(x-\alpha)}{\alpha} d\alpha \right| > (\pi + 3) k^{-\mu} \tag{18}$$

pour x étranger à L_μ, n'est vérifiée que dans un ensemble de mesure $< 2k^{-\mu}$; parsuite l'ensemble des valeurs de x étrangères à $L = L_0 + L_1 + \dots$ et satisfaisantes à l'inégalité (18), pour une valeur $\mu \geqq \mu_0$ au moins, est de mesure inférieure à la somme:

$$2k^{-\mu_0} + 2k^{-\mu_0 - 1} + 2k^{-\mu_0 - 2} + \dots$$

Prenons μ_0 tel que l'on ait:

(19) $$2k^{-\mu_0}+2k^{-\mu_0-1}+2k^{-\mu_0-2}+\ldots<\frac{\varepsilon}{6}.$$

En vertu de (9) et (19) on voit qu'on peut déterminer dans l'ensemble des valeurs de x, $F=(0,1)-E$, un autre ensemble, soit G, de mesure $>1-m-\frac{\varepsilon}{2}$, tel que la série

$$\int_0^a \frac{f_0(x+\alpha)-f_0(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha+\int_0^a \frac{f_1(x+\alpha)-f_1(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha+$$
$$+\int_0^a \frac{f_2(x+\alpha)-f_2(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha+\ldots$$

y soit convergente et que l'on ait

(20) $$\left|\int_0^a \frac{f_\mu(x+\alpha)-f_\mu(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha\right|\leqq(\pi+3)k^{-\mu}\quad\text{pour}\quad\mu\geqq\mu_0$$

Posons, maintenant:

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}=\varphi(x,\alpha)\quad\text{et}\quad\frac{f_i(x+\alpha)-f_i(x-\alpha)}{\alpha}=\varphi_i(x,\alpha).$$

Soit x un point quelconque de l'ensemble G et β un nombre positif inférieur à a; remarquons l'égalité suivante:

(21) $$\int_\beta^a \varphi(x,\alpha)\,d\alpha=\int_\beta^a\Big[\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\varphi_\mu(x,\alpha)\Big]d\alpha=$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=\mu_1}\int_\beta^a\varphi_\mu(x,\alpha)\,d\alpha+\int_\beta^a\Big[\sum_{\mu=\mu_1+1}^{\mu=\infty}\varphi_\mu(x,\alpha)\Big]d\alpha.$$

L'expression

(22) $$\varphi_\mu(x,\alpha)=\frac{f_\mu(x+\alpha)-f_\mu(x-\alpha)}{\alpha},$$

x étant donné et α variable, est différente de zéro dans un ensemble de mesure qui ne saurait surpasses celle de E_μ; parsuite, l'expression

(23) $$\sum_{\mu=\mu_1+1}^{\infty}\varphi_\mu(x,\alpha)$$

diffère de zéro dans un ensemble de mesure $\leq$ mesure de $E_\mu +$ $+ E_{\mu+1} + E_{\mu+2} \ldots$, c'est-à-dire de mesure $< k^{-4(\mu_1+1)}$; or, α étant fixé, l'expression (22) peut différer de zéro pour deux valeurs de μ au plus, puisque parmis toutes les valeurs $f_\mu(x+\alpha)$ ce n'est qu'une au plus qui peut différer de zéro, même remarque étant applicable à $f_\mu(x-x)$. α donné appartenant à l'intervalle (β, α) et $\varphi_\mu(x, \alpha) \neq 0$, on a

$$|\varphi_\mu(x, \alpha)| < \frac{1}{\beta};$$

donc, si l'expression (23) est non nulle, nous aurons

$$\left|\sum_{\mu=\mu_1+1}^{\infty} \varphi_\mu(x, \alpha)\right| < \frac{2}{\beta}, \tag{24}$$

ce qui donne

$$\left|\int_\beta^a \Big[\sum_{\mu=\mu_1+1}^{\infty} \varphi_\mu(x, \alpha)\Big]\, d\alpha\right| < \frac{2k^{-4(\mu_1+1)}}{\beta}, \tag{25}$$

d'où l'on tire:

$$\lim_{\mu_1=\infty} \int_\beta^a \Big[\sum_{\mu=\mu_1+1}^{\infty} \varphi_\mu(x, \alpha)\Big]\, d\alpha = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\int_\beta^a \varphi(x,\alpha)d\alpha = \int_\beta^a \varphi_0(x,\alpha)d\alpha + \int_\beta^a \varphi_1(x,\alpha)d\alpha + \int_\beta^a \varphi_2(x,\alpha)d\alpha + \ldots \tag{26}$$

Montrous maintenant que l'expression

$$\left|\int_\beta^a \varphi(x,\alpha)d\alpha - \int_0^a \varphi_0(x,\alpha)\,d\alpha - \int_0^a \varphi_1(x,\alpha)d\alpha - \ldots\right| = \tag{27}$$
$$= \left|\int_0^\beta \varphi_0\,d\alpha + \int_0^\beta \varphi_1\,d\alpha + \int_0^\beta \varphi_2\,d\alpha + \ldots\right|$$

peut être rendue inférieure à tout nombre positif donné γ aussi petit que l'on veut, à condition de prendre β assez petit
En effet, en vertu de (20), nous avons

$$\left|\int_0^\beta \varphi_\mu\,d\alpha + \int_0^\beta \varphi_{\mu+1}dx + \ldots\right| \leq (\pi+3)(k^{-\mu} + k^{-\mu-1} + k^{-\mu-2}\ldots) \tag{28}$$

pour $\mu > \mu_0$: choisissons alors μ assez grand pour que l'expression (28) soit inférieure à $\frac{1}{2}\gamma$ et prenons ensuite β assez petit pour que l'on ait:

$$\left|\int_0^\beta \varphi_i(x, \alpha)\,d\alpha\right| < \frac{\gamma}{2^\mu} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1;$$

un β satisfaisant à ce choix rend bien l'expression (28) plus petite que γ, donc cette expression tend vers zéro, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_0^a \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

existe au sens expliqué et est égale à la somme de la série

$$\int_0^a \varphi_0(x, \alpha)\,d\alpha + \int_0^a \varphi_1(x, \alpha)\,d\alpha + \int_0^a \varphi_2(x, \alpha)\,d\alpha + \ldots$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(x) = f(x) - 1.$$

On démontrera pour cette fonction, d'une façon tout-à-fait analogue à celle qui nous a servi à cette fin quand il s'agissait de $f(x)$, ce fait qu'il est possible de déterminer dans l'ensemble E un ensemble H de mesure supérieure à $m - \frac{\varepsilon}{2}$ et dans lequel l'intégrale

$$\int_0^a \frac{F(x+\alpha) - F(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \tag{29}$$

existe au sens admis. Mais l'intégrale (29) est égale à l'intégrale

$$\int_0^a \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha, \tag{30}$$

donc cette dernière existe dans l'ensemble $G + H$ de mesure $> 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant aussi petit que l'on veut.

Le théorème est donc démontré.

§ 5. Théorème 1 généralisé.

Soit $f(x)$ une fonction mesurable, nulle aux points étrangers à l'intervalle $(0, 1)$ et ne prenant que des valeurs $0, 1, 2, \ldots, p$ dans cet intervalle; l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

considérée comme $\lim\limits_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^1$ *existe et est fini pour presque toutes les valeurs de* x.

En effet, désignons par E_i l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 1)$ caractérisé par l'égalité $f(x)=i$ (pour $i=0, 1, 2,\dots, p$); définissons ensuite une fonction $f_i(x)$, en posant:

$$f_i(x)=i \quad \text{pour } x \text{ dans } E_i$$

$$f_i(x)=0 \quad \text{ailleurs.}$$

Alors, on a

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_p(x);$$

mais chacune des intégrales

$$\int_0^1 \frac{f_i(x+\alpha)-f_i(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \quad \text{pour } i=0, 1,\dots p$$

existe et est finie presque partout, ce qui démontre la proposition en question.

§ 6. **Théorème 2.** *Soit* $f(x)$ *la fonction définie au paragraphe précédent, l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

représente une fonction de x *à carré sommable et l'on a*

$$\int_0^1 dx\left[\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right]^2 \leqq \pi^2\int_0^1 [f(x)]^2dx.$$

Attribuons à ε une suite infinie de valeurs positives décroissantes et tendant vers zéro

(31) $$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3>\dots>\varepsilon_n>\dots$$

Soit E un ensemble mesurable quelconque et b un point de cet ensemble; désignons par δ un nombre positif quelconque et par $E(b, \delta)$ la partie de l'ensemble E comprise dans l'intervalle $(b-\delta, b+\delta)$; soit $e(b, \delta)$ la mesure de $E(b, \delta)$.

Les points b de l'ensemble E satisfaisants à cette condition que

$$\lim_{\delta=0} \frac{e(b, \delta)}{2\delta} = 1$$

sont dits *points de densité* de E.

Rappellons qu'on a le théorème suivant:
presque tous les points d'un ensemble mesurable quelconque sont ses points de densité.

Désignons par Q_i l'ensemble de points b de densité de E lui appartenants et pour lesquels on a:

$$\text{(32)} \qquad \frac{\text{mesure } E_i(b, \delta)}{2\delta} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$$

sous la seule condition de prendre $\delta \leqq \eta$.

La mesure de Q_i diffère de celle de E_i d'une quantité aussi petite que l'on veut à condition de prendre η assez petit; on choisira η tel que l'on ait

$$\text{(33)} \qquad \text{mesure } (Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_p) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Divisons l'intervalle (0, 1) en intervalles partiels égales de longueurs $h \leqq \eta$, et supposons qu'un certain intervalle h contient un point b de l'ensemble Q_i; alors, en vertu de l'inégalité (32), on a:

$$\frac{\text{mesure } E_i(b, h)}{2h} > 1 - \frac{\varepsilon}{4},$$

par suite l'ensemble des points de l'intervalle $(b - h, b + h)$ étrangers à E est de mesure inférieure à $\frac{\varepsilon h}{2}$; donc, à fortiori, les points de l'intervalle h en question n'appartenant pas à l'ensemble E_i forment un ensemble de mesure $< \frac{\varepsilon h}{2}$. De là on conclut, en particulier, qu'un même intervalle partiel ne peut contenir simultanément de points de deux ensembles Q distincts.

Définissons maintenant une fonction $\theta_s(x)$ en convenant de poser:

1° $\theta_s(x) = 1$ en tout point d'un intervalle partiel h, à condition que celui-ci contienne des points de l'ensemble Q_i.

2°. $\theta_s(x) = 0$ en tout point de l'intervalle h s'il ne contient de points d'aucun des ensembles Q_i.

En vertu de ce qui a était dit sur la contribution des intervalles partiels contenant des points des ensembles Q_i et en vertu de (33) on conclut que les points, où la fonction $\theta_\varepsilon(x)$ diffère de $f(x)$, forment un ensemble H de mesure inférieure à ε. Et, en remarquant ensuite que

$$|\theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leqq p,$$

on obtient

$$(34) \qquad \left| \int_0^1 [\theta_\varepsilon(x)]^2 dx - \int_0^1 [f(x)]^2 dx \right| < \varepsilon p^2.$$

Recouvrons l'ensemble H par un système d'intervalles L' dont la somme des longueurs soit encore inférieure à ε; retranchons du système L' un système d'un nombre fini d'intervalles, soit L'_1, de telle sorte que l'on ait: mesure de $L' - L'_1$ est inférieure a ε^2; retranchons du système $L' - L'_1$ un système fini d'intervalles, soit L'_2, de façon que la mesure de $L' - L'_1 - L'_2$ soit inférieure à ε^3 et ainsi de suite:

$$L' = L'_1 + L'_2 + L'_3 + \dots$$

On désignera par H_i l'ensemble des points de H recouverts par les intervalles du système L'_i; on obtient ainsi:

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + \dots$$

De même que nous avons eu déjà l'occasion de le faire au § 4, élargissons les intervalles des systèmes $L'_1, L'_2, L'_3, \dots$ d'une certaine façon et désignons par L_μ le système d'intervalles élargis du système L'_μ; on supposera dans la suite que la mesure de $L_\mu + L_{\mu+1} + \dots$ soit inférieure à ε^μ; on posera encore $L = L_1 + L_2 + \dots$

Cela étant, définissons une suite de fonctions $f_1(x), f_2(x), \dots$, en posant:

1° $f_i(x) = f(x) + \theta_\varepsilon(x)$ aux points de l'ensemble H_i

2° $f_i(x) = 0$ aux points étrangers à l'ensemble H_i.

Posons, ensuite

$$f_i(x) = \sum_{j=-p}^{j=+p} f_{i,j}(x),$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de j depuis $-p$ jusqu'à $+p$, sauf $j = 0$, et où l'on a posé

$$f_{i,j}(x) = f_i(x) \quad \text{si} \quad f_i(x) = j \quad \text{et}$$
$$f_{i,j}(x) = 0 \quad \text{dans le cas contraire.}$$

Comme au § 4, on voit que les points étrangers à L_i et satisfaisant, a étant déterminé d'une certaine façon, à l'inégalité

$$(35)\qquad \left|\int_0^a \frac{f_{i,j}(x+\alpha)-f_{i,j}(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| \geqq (\pi+3)\,|j|\,\varepsilon^{1/4}$$

forment un ensemble de mesure $< 2\varepsilon^{1/4}$; parsuite, hors d'un certain ensemble de mesure inférieure à

$$4p\varepsilon^{1/4}+4p\varepsilon^{2/4}+4p\varepsilon^{3/4}+\ldots+\varepsilon = 4p\,\frac{\varepsilon^{1/4}}{1-\varepsilon^{1/4}}+\varepsilon$$

l'inégalité (35) n'est vérifiée pour aucune valeur de i et de j. Donc en tout point étranger à un ensemble de mesure inférieure à

$$(36)\qquad 4p\,\frac{\varepsilon^{1/4}}{1-\varepsilon^{1/4}}+\varepsilon=\omega$$

se trouve verifiée l'inégalité suivante:

$$(37)\qquad \left|\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha-\int_0^1 \frac{\theta_\varepsilon(x+\alpha)-\theta_\varepsilon(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| =$$

$$=\left|\sum_{\substack{1\leqq i\leqq\infty\\ -p\leqq j\leqq +p}}\int_0^1 \frac{f_{i,j}(x+\alpha)-f_{i,j}(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| <$$

$$< \sum_{\substack{1\leqq i\leqq\infty\\ -p\leqq j\leqq +p}} (\pi+3)\,|j|\,\varepsilon^{1/4} < (\pi+3)\,2p^2\,\frac{\varepsilon^{1/4}}{1-\varepsilon^{1/4}}.$$

Dans l'expression (37) on fait la première transformation (avec signe d'égalité) en vertu de la possibilité, démontrée au § 4, d'intégration terme à terme.

En désignant par I l'ensemble de valeurs de x satisfaisant à l'inégalité (37) on aura évidemment: mesure $I > 1-\omega$.

En considérant l'expression de ω (36) et l'inégalité (37) et en supposant une convergence suffisamment rapide vers zéro de la suite de valeurs de ε (31) (en posant, par exemple, $\varepsilon_i \leqq \varepsilon_1^i$), on voit sans peine que presque partout dans $(0,1)$ se trouve vérifiée l'égalité:

$$(38)\qquad \lim \int_0^1 \frac{\theta_\varepsilon(x+\alpha)-\theta_\varepsilon(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha.$$

Partageons maintenant l'intervalle $(0, 1)$ en n intervalles égaux de longueur $\frac{1}{n} = \gamma$; posons

$$m_i = n \int\limits_{(i-1)\gamma}^{i\gamma} \theta_\varepsilon(x)\,dx$$

et formons l'expression

$$\Phi_\varepsilon(l) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{s_i - l}$$

où $s_i = i - \frac{1}{2}$.

La fonction $\theta_\varepsilon(x)$ présentant un nombre fini de points de discontinuité, désignons par K l'ensemble de points de l'intervalle $(0, 1)$ qu'on obtient en enlevant de cet intervalle un système d'intervalles de petitesse arbitraire enfermant les points de discontinuite de $\theta_\varepsilon(x)$; on peut donc supposer la mesure de K aussi voisine de 1 qu'on le voudra.

Si peu que diffère la mesure de K de 1 et si petit que soit $\beta > 0$, on pourra toujours, en fractionnant l'intervalle $(0, 1)$ en un nombre suffisamment grand d'intervalles γ, s'arranger de telle façon que l'inégalité

$$\text{39)} \qquad \left| \left[\int\limits_0^1 \frac{\theta_\varepsilon(x+\alpha) - \theta_\varepsilon(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \right]^2 - [\Phi_\varepsilon(l)]^2 \right| < \beta,$$

où l désigne l'indice d'intervalle γ contenant le point x, soit vérifiée par tous les points de l'ensemble K

En remarquant, ensuite, que l'expression

$$\left[\int\limits_0^1 \frac{\theta_\varepsilon(x+\alpha) - \theta_\varepsilon(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \right]^2$$

est une fonction continue en tout point de l'ensemble K, en intégrant (39) on obtient

$$(40) \qquad \int\limits_K \left[\int\limits_0^1 \frac{\theta_\varepsilon(x+\alpha) - \theta_\varepsilon(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \right]^2 dx < \sum_{l=1}^{l=n} [\Phi_\varepsilon(l)]^2 \gamma + \beta$$

et en vertu du lemme 1, on peut écrire:

$$(41) \qquad \int\limits_K \left[\int\limits_0^1 \frac{\theta_\varepsilon(x+\alpha) - \theta_\varepsilon(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \right]^2 dx < \pi^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i^2 \gamma + \beta.$$

Ensuite, il est aisé de voir que

$$\lim_{\gamma=0}\sum_{i=1}^{n} m_i^2\gamma = \int_0^1 [\theta_\varepsilon(x)]^2\,dx,$$

et en remarquant que l'inégalité (41) demeure vérifiée si peu que diffère la mesure de K de 1 et quel petit que soit β, à condition de prendre γ suffisemment petit, on passe à l'inégalité suivante

$$(42)\qquad \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{\theta_\varepsilon(x+\alpha)-\theta_\varepsilon(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right]^2 dx \leqq \pi^2\int_0^1[\theta_\varepsilon(x)]^2\,dx.$$

Enfin, en tenant compte de (34) et de (38), et en passant dans (42) à la limite, on obtient

$$(43)\qquad \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right]dx \leqq \pi^2\int_0^1[f(x)]^2\,dx$$

c. q. f. d

§ 7. **Corollaire analogue au lemme 2.** Posons

$$\int_0^1 [f(x)]^2\,dx = M^2;$$

supposons qu'on définit α, dépendant de x, de telle sorte que l'intégrale

$$\int_0^\alpha \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

atteint, en valeur absolue, son maximum. Moyennant ces conditions un raisonnement tout-à-fait analogue à celui qui nous a permis de légitimer le lemme 2, nous conduit au résultat suivant:

Les valeurs de x vérifiants l'inégalité

$$\left|\int_0^\alpha \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\right| > \pi M k$$

forment, pour $k<516$, un ensemble de mesure $< \dfrac{516}{k^2} < k^{-1}$.

§ 8. **Théorème 3.** *$f(x)$ étant une fonction à carré sommable, l'intégrale*

$$\int_0^\alpha \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

considérée comme $\lim\limits_{\varepsilon=0}\int\limits_\varepsilon^\alpha$ *est finie pour presque toutes les valeurs de* x.

Supposons d'abord $f(x)$ non négative pour toutes les valeurs de x. Définissons une fonction $f(x, a)$, en posant:

$$f(x,a)=f(x)-a, \quad \text{si} \quad f(x)-a \geqq 0$$
$$f(x,a)=0, \quad \text{si} \quad f(x)-a<0,$$

et donnons nous une suite de nombres positifs croissants indifiniment:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

sous la condition

(44) $$\int_0^1 [f(x, a_{\mu-1})]^2 dx < \frac{1}{2k^{4\mu}} \quad \text{pour } k>516 \text{ et } \mu=1,2,3,\ldots$$

On définira maintenant une fonction $f_0(x)$ de la façon suivante: on divise l'intervalle $(0, a_0)$ en n_0 intervalles partiels de longueur $h_0 < \frac{1}{k^2\sqrt{2}}$ chacun:

$$0, h_0, 2h_0, \ldots, n_0 h_0 = a_0$$

et l'on pose

$$f_0(x)=ih_0, \quad \text{si} \quad ih_0 \leqq f(x) < (i+1)h_0$$
$$f_0(x)=a_0, \quad \text{si} \quad a_0 \leqq f(x).$$

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 [f(x)-f_0(x)]^2 dx;$$

la fonction sous le signe $\int$ est soit inférieure à h^2, soit égale à $[f(x, a_0)]^2$; donc

(45) $$\int_0^1 [f(x)-f_0(x)]^2 dx < h_0^2 + \frac{1}{2k^4} < \frac{1}{k^4}$$

On divise l'intervalle $(0, a_1)$ en n_1 intervalles partiels de longueurs $h_1 < \frac{1}{k^4\sqrt{2}}$:

$$0, h_1, 2h_1, \ldots, n_1 h_1 = a_1,$$

et l'on pose

$$f_1(x) = ih_1, \quad \text{si} \quad ih_1 \leqq f(x) - f_0(x) < (i+1)h_1$$
$$f_1(x) = a_1, \quad \text{si} \quad a_1 \leqq f(x) - f_0(x);$$

on obtient alors:

(46)
$$\int_0^1 [f(x) - f_0(x) - f_1(x)]^2 dx < h_1^2 + \frac{1}{2k^8} < \frac{1}{k^8}$$

D'une façon analogue, pour l'intervalle $(0, a_2)$ on définira une fonction $f_2(x)$ sur n_2 intervalles partiels de longueurs $h_2 < \frac{1}{k^6\sqrt{2}}$:

$0, h_2, 2h_2, \ldots, n_2 h_2 = a_2$, en posant

$$f_2(x) = ih_2 \quad \text{sous la condition} \quad ih_2 \leqq f(x) - f_0(x) - f_1(x) < (i+1)h_2$$
$$f_2(x) = a_2 \quad \text{sous la condition} \quad a_2 \leqq f(x) - f_0(x) - f_1(x),$$

et l'on aura

(47)
$$\int_0^1 [f(x) - f_0(x) - f_1(x) - f_2(x)]^2 dx < \frac{1}{k^{12}}$$

et ainsi de suite.

On a alors

(48)
$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

avec

(49)
$$\int_0^1 [f_\mu(x)]^2 dx < \frac{1}{k^{4\mu}} \qquad \text{pour } \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

A la manière de § 4, l'inégalité (49) permet d'établir, d'abord, la relation

$$\int_\beta^a \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha)}{\alpha} d\alpha = \int_\beta^a \frac{f_0(x+\alpha) - f_0(x-\alpha)}{\alpha} d\alpha +$$
$$+ \int_\beta^a \frac{f_1(x+\alpha) - f_1(x-\alpha)}{\alpha} d\alpha + \int_\beta^a \frac{f_2(x+\alpha) - f_2(x-\alpha)}{\alpha} d\alpha + \ldots.$$

puis, elle permet d'établir la convergence presque partout de la série

$$\int_0^a \frac{f_0(x+\alpha)-f_0(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha + \tag{50}$$

$$+\int_0^a \frac{f_1(x+\alpha)-f_1(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha + \int_0^a \frac{f_2(x+\alpha)-f_2(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha + \ldots$$

et, enfin, on vera que l'intégrale

$$\int_0^a \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha$$

existe au sens expliqué et est égale à la somme de la série (50).

Donc le théorème 3 est démontré dans le cas où $f(x) \geqq 0$. Au cas général, c'est à dire quand $f(x)$ puisse recevoir des valeurs aussi bien positives que négatives, posons

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

ayant défini φ et ψ par les conventions suivantes:

$$\begin{array}{lll} \varphi(x) = f(x) & \text{là où} & f(x) \geqq 0 \\ \varphi(x) = 0 & \text{si} & f(x) < 0 \\ \psi(x) = f(x) & \text{là où} & f(x) \leqq 0 \\ \psi(x) = 0 & \text{si} & f(x) > 0. \end{array}$$

Le théorème en question étant vrai pour chacune des fonctions φ et ψ, il le sera aussi pour leur somme, c'est-à-dire pour f, ce qui achève la démonstration.

§ 9. Soit $f(x)$ une fonction à carré sommable.

Théorème 4. *L'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha$$

est une fonction de x à carré sommable et l'on a

$$\int_0^1 dx \left[\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}d\alpha\right]^2 \leqq 2\pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx.$$

Supposons, d'abord, que $f(x) \geqq 0$ partout dans $(0, 1)$ et que $f(x)=0$ ailleurs. Considérons le développement de $f(x)$ en série (48); posons

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x);$$

$F_n(x)$ étant une fonction du type de celles considérées aux §§ 5 et 6 le théorème 2 lui est alors applicable, c'est-à-dire qu'on a

$$(51)\qquad \int_0^1 x \left[\int_0^1 \frac{F_n(x+\alpha)-F_n(x-\alpha)}{\alpha}\, dx \right]^2 \leqq \pi^2 \int_0^1 [F_n(x)]^2\, dx.$$

D'autre part, aux paragraphes précédents on a démontré que l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 \frac{F_n(x+\alpha)-F_n(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha$$

est vérifiée presque partout; en passant à la limite dans (51) pour n infini, nous avons:

$$(52)\qquad \int_0^1 dx \left[\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \right]^2 \leqq \pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2\, dx$$

Débarassons nous maintenant de cette hypothèse que f ne soit jamais négative dans $(0, 1)$ et posons, comme au § 8:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Nous avons:

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha =$$

$$= \int_0^1 \frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha + \int_0^1 \frac{\psi(x+\alpha)-\psi(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha,$$

$$\left[\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} \right]^2 \leqq 2 \left[\int_0^1 \frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \right]^2 +$$

$$+ 2 \left[\int_0^1 \frac{\psi(x+\alpha)-\psi(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \right]^2$$

et en vertu de (52):

$$(53)\qquad \int_0^1 dx \left[\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \right]^2 \leqq 2\pi^2 \int_0^1 \{[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2\}\, dx,$$

mais l'une des fonction ψ, φ s'annulant en x quelconque, on a:

$$[\psi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 = [f(x)]^2$$

donc, en vertu de (53), on écrira:

$$\int_0^1 dx \left[\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha\right]^2 \leqq 2\pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx. \tag{54}$$

C. Q. F. D.

27 — VI — 1921.