Démonstration élémentaire du théorème sur la densité des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Plusieurs démonstrations ont été données au théorème de M. Lebesgue, d'après lequel tous les points d'un ensemble mesurable sont points de densité de cet ensemble, sauf peut-être les points formant un ensemble de mesure nulle [1]). Qu'il me soit permis de donner ici encore une démonstration de ce théorème important, qui me semble plus simple que les démonstrations élémentaires que je connais et qui s'applique aux ensembles dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Je démontrerai même un théorème un peu plus général que voici:

Théorème: *Presque tous les points d'un ensemble E quelconque, situé dans l'espace à q dimensions, sont points de densité extérieure de E.*

Soit E un ensemble donné quelconque dans l'espace à q dimensions. Désignons par $S(p, r)$ une sphère q-dimensionnelle de centre en p et de rayon r. Le point p sera dit *point de densité extérieure de E,* si l'on a

$$\lim_{r=0} \frac{m_e[E.\,S(p, r)]}{m[S(p, r)]} = 1 \tag{0}$$

($m(Q)$, resp. $m_e(Q)$ désignant la mesure, resp. la mesure extérieure lebesguienne de l'ensemble Q).

[1]) H. Lebesgue: *Ann. de l'Ecole Normale* (3) 27, 1910; A. Denjoy: *Journ. de Math.* (7) 1, 1915, p. 133; C. de la Vallée Poussin: *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 1915 et *Intégrales de Lebesgue* etc. Paris 1916, p. 71; N. Lusin et W. Sierpiński: *Rendiconti Palermo* 1917.

Soit N l'ensemble des points p de E où la formule (0) ne subsiste pas. Désignons par N_k l'ensemble des points p de E où l'on a

$$\underline{\lim_{r=0}} \frac{m\,[E.\,S(p,r)]}{m[S(p,r)]} < 1 - \frac{1}{k}; \tag{1}$$

on voit sans peine que

$$N = N_2 + N_3 + N_4 + \dots$$

Pour démontrer que $m(N)=0$ il suffira donc de démontrer qu'on a $m(N_k)=0$ pour tout k naturel >1. On voit aussi sans peine qu'il suffira de traiter le cas où l'ensemble N_k est borné, donc le nombre

$$m_e(N_k) = \mu \tag{2}$$

fini.

Fixons donc l'indice $k>1$ et soit ε un nombre positif donné quelconque.

La mesure extérieure d'un ensemble Q étant la borne inférieure de mesures d'ensembles ouverts contenants Q, il existe, d'après (2), un ensemble ouvert G contenant N_k et tel que

$$m(G) < \mu + \varepsilon. \tag{3}$$

D'après la définition de l'ensemble N_k et d'après (1) il existe pour tout point p de N_k une sphère $S(p,r)$ de rayon aussi petit que l'on veut, satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{m_e[E\,.\,S(p,r)]}{m[S(p,r)]} < 1 - \frac{1}{k}.$$

L'ensemble N_k étant contenu dans E et dans l'ensemble ouvert G, il existe donc pour tout point p de N_k une sphère $S(p,r)$ intérieure à G et satisfaisant à l'inégalité

$$m_e[N_k\,.\,S(p,r)] < \left(1 - \frac{1}{k}\right) m[S(p,r)]. \tag{4}$$

D'après le théorème bien connu de Lindelöf (qui est une généralisation du théorème de Borel aux ensembles quelconques) il existe une infinité dénombrable des sphères

$$S_j = S(p_j, r_j), \qquad (j=1,2,3,\dots) \tag{5}$$

toutes intérieures à G, satisfaisant à (4) et telles que

$$N_k \subset S_1 + S_2 + S_3 + \dots \tag{6}$$

Nous aurons donc, d'après (4) et (5):

$$(7) \qquad m_e(N_k S_j) < \left(1 - \frac{1}{k}\right) m(S_j) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'après (2) et (6) nous aurons

$$m(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots) \geqslant \mu,$$

donc, pour h suffisamment grand:

$$(8) \qquad m(S_1 + S_2 + \ldots + S_h) > \mu - \varepsilon.$$

Supposons les sphères de la suite

$$(9) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_h$$

rangées d'après leurs rayons non croissants, donc

$$(10) \qquad r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_h.$$

Posons $S_{n_1} = S_1$ et soit S_{n_2} la première sphère de la suite (9) qui n'a pas des points communs avec S_{n_1}, soit S_{n_3} la première sphère de la suite (9) sans points communs avec $S_{n_1} + S_{n_2}$ et ainsi de suite [1]).

On arrive ainsi à une nouvelle suite des sphères

$$(11) \qquad S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_l} \qquad (l \leqslant h)$$

extraite de la suite (9).

Posons

$$(12) \qquad S'_j = S(p_j, 3r_j);$$

je dis que

$$(13) \qquad S_1 + S_2 + \ldots + S_h \subset S'_{n_1} + S'_{n_2} + \ldots + S'_{n_l}.$$

En effet, soit p un point de la sphère S_g, où $g \leqslant h$. Il résulte de la définition de la suite (11) que si la sphère S_g ne figure pas dans la suite (11), elle a un point commun π avec une sphère S_{n_s} de cette suite, où $n_s < g$. D'après (10) on a donc:

$$(14) \qquad r_{n_s} \geqslant r_g.$$

$\varrho(a, b)$ désignant la distance entre les points a et b, nous avons évidemment

[1]) Cf. la démonstration du théorème de Vitali (Überdeckungssatz) qui se trouve dans le livre de C. Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner 1918, p. 301.

$$\varrho(p, p_{n_s}) \leqslant \varrho(p, \pi) + \varrho(\pi, p_{n_s}) \leqslant 2r_y + r_{n_s},$$

donc, d'après (14):

$$\varrho(p, p_{n_s}) \leqslant 3r_{n_s},$$

ce qui prouve que p est un point de la sphère

$$S(p_{n_s}, 3r_{n_s}) = S'_{n_s},$$

donc un point de l'ensemble $S'_{n_1} + S'_{n_2} + \ldots + S'_{n_l}$. La formule (13) est ainsi établie.

Posons

(15) $$T = S_{n_1} + S_{n_2} + \ldots + S_{n_l};$$

d'après (12) et (5) nous avons évidemment

$$m(S'_j) = 3^q m(S_j), \qquad (j = 1, 2, \ldots h),$$

donc, d'après (15) et (13), les sphères (11) étant sans points communs deux à deux:

$$3^q m(T) = 3^q[m(S_{n_1}) + m(S_{n_2}) + \ldots + m(S_{n_l})] =$$
$$= m(S'_{n_1}) + m(S'_{n_2}) + \ldots + m(S'_{n_l}) \geqslant m(S_1 + S_2 + \ldots + S_h),$$

donc, d'après (8):

(16) $$3^q m(T) > \mu - \varepsilon.$$

Or, d'après (15) et (7), les sphères (11) étant sans points communs deux à deux:

(17) $$m_e(N_k T) \leqslant \sum_{j=1}^{l} m_e(N_k S_{n_j}) < \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{j=1}^{l} m(S_{n_j}) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) m(T)$$

Les sphères (9) étant intérieures à G, nous avons, d'après (15), $T \subset G$, donc $T - N_k \subset G - N_k$ et parsuite:

(18) $$m_i(T - N_k) \leqslant m_i(G - N_k).$$

Or, les ensembles T et G étant mesurables et $G \supset N_k$, on a

$$m_i(T - N_k) = m(T) - m_e(N_k T),$$
$$m_i(G - N_k) = m(G) - m_e(N_k),$$

donc, d'après (18), (3) et (2):

$$m(T) - m_e(N_k T) < \varepsilon,$$

ce qui donne, d'après (17)

$$m(T) < k\varepsilon,$$

donc, d'après (16):

$$\mu < (3^q k + 1)\varepsilon.$$

Le nombre positif ε étant quelconque, cela démontre que

$$\mu = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (2), $m(N) = 0$, c. q. f. d.

Nous avons ainsi $m(N) = 0$ et notre théorème est démontré.

Lorsque l'ensemble E est mesurable (L), les points de densité extérieure de E coïncident avec les points de densité de E et nous obtenons le théorème de M. Lebesgue.