Das Stetigkeitsaxiom des Linearcontinuums als Inductionsprinzip betrachtet.

Von

A. Khintchine (Ivanowo-Wosniesensk, Russland).

Während meiner Arbeit im Gebiete der Functionentheorie hat meine Aufmerksamkeit oftmals der Umstand angezogen, dass dem Stetigkeitsaxiom in dieser Lehre eine ganz eigenartige Rolle zukommt; dieses Axiom findet nähmlich beinahe ausnahmlos eine Anwendung jedesmal. wenn es sich darum handelt, von dem Verhalten einer Punktmenge oder Function oder Functionenfolge in der Umgebung gewisser Punkte auf den Gesamtcharakter der Menge resp. Function resp. Functionenfolge in einem ganzen Intervall zu schliessen. Der Heine-Borel'sche Satz sowie das Theorem von der gleichmässigen Stetigkeit einer stetigen Function bieten dazu wohl die einfachsten Beispiele. Indem ich die Sache näher in Angriff nahm, habe ich sofort erkannt, dass das genannte Axiom thatsächlich eine logisch äquivalente Form zulässt, welch letztere ein typisches Inductionsprinzip darstellt und damit die oben erklärte besondere Rolle des Axioms in der Functionentheorie bestätigt und in helles Licht bringt. Trotzdem die ganze Umformung sehr einfach ist, möchte ich sie doch hier kurz zusammenfassen, da die Sache, wie mir scheint, ein methodologisches Interesse bietet, und meines Wissens noch nicht veröffentlicht worden war.

Ich beginne damit, die beiden Behauptungen, deren logische Äquivalenz nunmehr bewiesen werden soll, ausdrücklich zu formulieren; dabei bedeuten „Punkte“ nichts weiteres wie Elemente eines Linearcontinuums, welches ohne erstes sowie auch ohne letztes Element gedacht wird; „links" und „rechts" haben die Bedeutung *vor* resp. *nach* in der Ordnung des Continuums.

I. Stetigkeitsaxiom (Dedekind'sche Form). *Es seien die Punkte des Continuums unter zwei Classen, A und B, verteilt, von der Beschaffenheit, dass* 1^0 *Jede Classe wenigstens einen Punkt enthält,* 2^0 *Jeder Punkt einer und nur einer von den beiden Classen angehört und* 3^0 *Jeder Punkt der Classe A ist zur linken von jedem Punkte der Classe B gelegen. Alsdann existiert entweder ein letzter Punkt der Classe A oder ein erster der Classe B* (indem beides zugleich nicht eintreffen kann).

II. Inductionsprinzip. *Ein bestimmter Satz S erfülle die beiden Bedingungen:* $1'^0$ *Es gibt einen Punkt α von der Beschaffenheit, dass für jeden Punkt, der links von α liegt, S richtig ist.* $2'^0$ *Falls S für jeden Punkt gilt, welcher links von einem bestimmten Punkte β gelegen ist, giebt es immer einen Punkt γ, welcher rechts von β liegt, und dem die nämliche Beschaffenheit zukommt, also S für jeden Punkt gilt, welcher links von γ gelegen ist.*

Unter diesen Voraussetzungen gilt S für jeden Punkt des Continuums.

Satz. — *Die Behauptungen I und II sind logisch äquivalent.*

Beweis:

1. Es sei I richtig und die beiden Voraussetzungen $1'^0$ und $2'^0$ von II erfüllt. Der Punkt x gehöre der Classe A oder der Classe B an, je nachdem S für alle oder nicht alle links von x gelegenen Punkte gilt. Es ist evident, dass diese Einteilung den Bedingungen 2^0 und 3^0 von I Genüge leistet. Wenn aber II nicht richtig ist, so muss die Classe B wenigstens einen Punkt enthalten, und damit ist wegen $1'^0$ auch 1^0 erfüllt. Wir bringen nun I zur Anwendung. Es ist leicht zu sehen, dass die Classe B infolge ihrer Definition kein erstes Element enthalten kann[1]). Also muss die Classe A ein letztes enthalten. Indem wir dieses mit β bezeichnen, erkennen wir sofort einen Widerspruch mit $2'^0$, welch letztere Bedingung als erfüllt vorausgesetzt war. Also muss II richtig sein.

[1]) Die Existenz eines Punktes, der zwischen zwei beliebig gegebenen Punkten gelegen ist, welche hier werwendet sein muss, ist eine leicht ersichtliche Folge von I.

2. Es sei II richtig, und eine Einteilung des Continuums in zwei Classen gegeben, welche den Bedingungen 1^0, 2^0 und 3^0 von I Genüge leistet. Es möge die Behauptung „Der Punkt x gehört der Classe A" mit S bezeichnet werden, und I sei falsch. Wegen 1^0 und 3^0 ist die Voraussetzung $1'^0$ erfüllt. Weiter mögen alle Punkte, die links von einem bestimmten Punkte β liegen, der Classe A angehören. Dann muss β selbst auch ein Punkt der Classe A sein, sonst wäre er nämlich der erste in B. Er kann aber auch nicht der letzte Punkt von A sein, und es existiert somit rechts von β ein Punkt γ, welcher noch der Classe A angehört. Damit hat sich aber auch $2'^0$ als erfüllt erwiesen, und da II als richtig vorausgesetzt war, schliessen wir, dass alle Punkte der Classe A angehören, was dem 1^0 widerspricht. Aus dem Widerspruche ergiebt sich, dass I nicht falsch sein kann, w. z. b. w.

Die Form II des Stetigkeitsaxioms erweist sich in den Anwendungen als nicht weniger elegant wie die gewöhnlichen Auffassungen, macht auch das geometrische Bild des Sachverhaltes meistenteils sehr durchsichtig. Ich möchte dem Leser empfehlen z. B. den Satz zu beweisen, dass eine stetige Function durch Null geht in einem Intervalle wo sie positive sowie negative Werte annimmt. Endlich bemerke ich, dass auch der Heine-Borel'sche Satz in sehr vielen Anwendungen durch das Inductionsprinzip ohne Verlust an Kürze oder Eleganz ersetzt werden kann.

Ivanowo-Wosniesensk,
Februar 1922.