

Sur la méthode d'inversion dans l'Analysis Situs.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

L'espace est transformé par inversion, lorsqu'à chaque point x distinct d'un point constant v correspond un point x^* situé sur le rayon \overrightarrow{vx} à distance $\rho(x^*, v) = \frac{1}{\rho(x, v)}$; le point v est dit le centre d'inversion. On voit aussitôt que, si v n'est pas un point d'accumulation d'un ensemble A borné ou non borné, cet ensemble se transforme toujours en un ensemble borné A^* . C'est grâce à cette propriété que la méthode d'inversion peut, en certaine mesure, réduire l'étude d'ensembles non bornés à celle des ensembles bornés.

Je me propose dans cette note d'établir les propriétés de l'inversion de façon à en extraire entièrement le sens topologique. Je choisis comme point de départ 4 propriétés de l'inversion et je prouve que chaque propriété topologique de l'inversion en est une conséquence. En d'autres termes: si l'on considère les propositions I—IV, qui vont suivre, comme une définition axiomatique de l'inversion, ces propositions forment un système d'axiomes *catégorique* (au sens de M. Veblen) par rapport aux transformations biunivoques et bicontinues de l'espace.

J'emploie les notations suivantes: 1 désigne l'espace euclidien à n dimensions. Si $X \subset 1$ (X est un ensemble contenu dans 1), X' désigne l'ensemble de points d'accumulation de X ; $\overline{X} = X + X'$. Pour plus de brièveté j'emploierai dans les opérations le signe v aussi pour désigner l'ensemble (v) composé du seul point v .

§ 1. Les axiomes d'inversion.¹⁾

Le centre d'inversion v sera désormais considéré comme fixe. Pour chaque sous-ensemble X de 1 , X^* désigne un sous-ensemble de 1 assujéti aux conditions suivantes:

- I. $(A + B)^* = A^* + B^*$
 II. $A^{**} = A - v$
 III. $A'^* = A'^* - v$
 IV. Si $v \in A'$, A^* est non borné, —

A et B étant des sous-ensembles quelconques de 1 .

On montre aisément que l'inversion telle qu'elle a été définie au début constitue une interprétation de l'opération X^* : elle remplit, en effet, les axiomes I—IV.

§ 2. Le calcul de l'opération X^* .

Nous allons déduire des axiomes I et II les théorèmes suivants:

- Théorème 1. $v^* = 0^* = 0$.
 " 2. $A^{***} = A^* = (A - v)^* = A^* - v$.
 " 3. $(AB)^* = A^* B^*$.
 " 4. $(A - B)^* = A^* - B^*$.
 " 5. $(1 - A)^* = 1 - A^* - v$; $1^* = 1 - v$.

Démonstration. 1. Selon II: $0^{**} = 0 - v = 0$. Mais $0^* = 0^* + 0$, d'où, selon I: $0^{**} = 0^{**} + 0^*$. Donc $0^* = 0$.

D'après II: $v^{**} = 0$, d'où $v^{***} = 0^* = 0$ et selon II: $v^{***} = v^* - v = 0$. On a donc $v^* = 0$ ou bien $v^* = v$. Dans le second cas $v^{**} = v^*$, donc $v^* = 0$ également.

2. En vertu de II, on a

$$(A - v)^* = (A^{**})^* = (A^*)^{**} = A^* - v.$$

D'autre part: $A + v = A - v + v$, d'où $A^* + v^* = (A - v)^* + v^*$; donc, selon le th. 1: $A^* = (A - v)^*$, d'où le théorème 2.

3. L'identité bien connue $A = A + AB$ entraîne:

$$A^* = A^* + (AB)^*$$

¹⁾ L'idée de mettre les axiomes d'inversion sous cette forme, afin de pouvoir utiliser le calcul logique m'a été suggérée par M. Knaster. C'est en se servant de ce calcul que je vais établir tous les théorèmes du § 2.

et de même

$$B^* = B^* + (AB)^*.$$

En multipliant ces deux identités membre à membre, on obtient

$$(1) \quad A^*B^* = A^*B^* + (AB)^*.$$

D'autre part, l'identité $A^* = A^* + A^*B^*$ entraîne selon I et II;

$$A - v = A - v + (A^*B^*)^*.$$

En multipliant cette identité par l'identité analogue:

$$B - v = B - v + (A^*B^*)^*,$$

on a

$$AB - v = AB - v + (A^*B^*)^*,$$

d'où

$$(AB - v)^* = (AB - v)^* + A^*B^* - v,$$

ce qui donne, en vertu du th. 2:

$$(2) \quad (AB)^* = (AB)^* + A^*B^*.$$

Les formules (1) et (2) impliquent le théorème 3.

4. L'identité $A + B = A - B + B$ entraîne

$$A^* + B^* = (A - B)^* + B^*,$$

d'où

$$A^* - B^* = (A - B)^* - B^*$$

et en ajoutant $(A - B)^*$ aux deux membres de cette identité, on a

$$(3) \quad (A - B)^* = (A - B)^* + A^* - B^*.$$

D'une façon analogue, l'identité

$$A^* + B^* = A^* - B^* + B^*$$

entraîne, en vertu du th. 2:

$$A - v + B - v = (A^* - B^*)^* + B - v$$

d'où

$$(A^* - B^*)^* = (A^* - B^*)^* + (A - v) - (B - v)$$

donc

$$A^* - B^* - v = A^* - B^* - v + (A - B - v)^*$$

et d'après le th. 2:

$$(4) \quad A^* - B^* = A^* - B^* + (A - B)^*.$$

Les formules (3) et (4) donnent le théorème 4.

5. Par définition de l'opération X^* , on a

$$1 = 1 + 1^*,$$

d'où $1^* = 1^* + 1^{**} = 1^* + 1 - v$, mais $1^* + 1 - v = 1 - v$, car d'après le th. 2: $1^* = 1^* - v \subset 1 - v$. Ainsi: $1^* = 1 - v$ et en vertu du th. 4 on obtient le th. 5.

§ 3. Les invariants de l'inversion.

Lemme. E étant un ensemble arbitraire, si la fonction $F(X)$ fait correspondre à chaque sous-ensemble X de E un sous-ensemble $F(X)$ de E de manière que

$$\begin{aligned} 1^\circ: & \quad F(X + Y) = F(X) + F(Y) \\ 2^\circ: & \quad FF(X) = X, \end{aligned}$$

la fonction $F(X)$ transforme l'ensemble E en lui-même de façon biunivoque.

Démonstration. Observons d'abord que $F(0) = 0$. En effet, $F(0) + 0 = F(0)$, d'où $FF(0) + F(0) = FF(0)$ et $0 + F(0) = 0$. Par conséquent, si $X \neq 0$, $F(X) \neq 0$, car l'égalité $F(X) = 0$ entraîne $X = FF(X) = F(0) = 0$.

Ainsi, l'ensemble $F(x)$ n'est pas vide, lorsque $x \in E$. D'autre part, $F(x)$ se réduit à un seul élément, car dans le cas contraire, on pourrait poser $F(x) = A + B$, où

$$(5) \quad A \neq A + B \quad \text{et} \quad B \neq A + B.$$

Or $x = FF(x) = F(B) + F(A)$, donc

$$(6) \quad F(A) = F(A) + F(B) \quad \text{ou bien} \quad F(B) = F(A) + F(B).$$

Chacune des égalités (6) contredit l'une des inégalités (5).

Il est donc établi que la fonction $F(x)$ transforme l'ensemble E de façon univoque. Il résulte directement de 2° que cette transformation est biunivoque et qu'en outre l'ensemble $F(X)$ se compose de tous les $F(x)$ où $x \in X$.

Le lemme établi, on en conclut, en posant

$$F(X) = X^* \quad \text{et} \quad E = 1 - v,$$

que l'inversion transforme l'ensemble $1 - v$ de façon biunivoque.

De plus, d'après le th. 2 et l'ax. III:

$$(A'(1-v))^* = A^*(1-v).$$

Or, comme l'a démontré M. Hausdorff¹⁾, si une fonction biunivoque $F(X)$ satisfait, pour un ensemble donné E , à l'égalité

$$F(X'E) = (F(X))'F(E)$$

quel que soit $X \subset E$, — cette fonction transforme l'ensemble E en $F(E)$ de façon bicontinue.

On en déduit le

Théorème 6. *L'opération X^* transforme l'ensemble $1-v$ en lui-même de façon biunivoque et bicontinue.*

L'importance de ce théorème se manifeste surtout dans les questions de l'invariance des propriétés d'ensembles par rapport à l'inversion.

Soit \mathcal{P} une propriété telle que, lorsqu'un ensemble X la possède, tout ensemble homéomorphe à X la possède également. Il résulte immédiatement du théorème 6 que cette propriété est invariante par rapport à l'opération X^* , exécutée sur les ensembles X ne contenant pas le centre d'inversion. Ainsi, en particulier, les propriétés d'être fermé et borné à la fois ou d'être connexe²⁾ sont des invariants de l'inversion lorsque $v \text{ non } \in X$. Il en est de même des propriétés d'être un domaine ouvert, un ensemble frontière, d'être localement connexe, d'être accessible³⁾ en un point $p (\neq v)$. On pourrait démontrer encore l'invariance de plusieurs autres propriétés importantes. Je n'en établis dans cet ouvrage que l'invariance de la notion de composante⁴⁾, pour m'en servir plus tard à prouver que le système d'axiomes I—IV est catégorique.

Théorème 7. *Si $v \text{ non } \in A$ et W est une composante de A , W^* est une composante de A^* .*

¹⁾ *Grundzüge der Mengenlehre* Chap. IX, § 1. Leipzig 1914.

²⁾ Un ensemble E est connexe, lorsqu'il n'existe aucune décomposition de E en deux ensembles A et B non vides et tels que $\overline{AB} + \overline{AB} = 0$.

³⁾ Un ensemble E est un domaine ouvert, lorsque $1-E$ est fermé. Un ensemble E est frontière, lorsque $\overline{1-E} = 1$. Un ensemble E est localement connexe au point p , lorsque dans chaque entourage de p il existe un sous-ensemble connexe C de E tel que $p \text{ non } \in \overline{E-C}$. Un ensemble fermé E est accessible au point p , s'il existe un continu C tel que $p = EC$.

⁴⁾ W est une composante de A , si W est un sous-ensemble connexe de A qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de A .

Démonstration. W étant connexe, W^* l'est également. En outre, il n'existe aucun sous-ensemble connexe S de A^* qui soit plus grand que W^* , car si on avait

$$W^* \subset S \subset A \text{ et } W^* \neq S,$$

on aurait $S = S + W^*$, donc $S^* = S^* + W^{**} = S^* + W$, d'où

$$(7) \quad W \subset S^* \subset A;$$

d'autre part, $S - W^* \neq 0$ et $v \text{ non } \in S - W^*$, donc $(S - W^*)^* \neq 0$, d'où (th. 4): $S^* - W^{**} = S^* - W \neq 0$ et

$$(8) \quad S^* \neq W$$

S^* étant connexe, les formules (7) et (8) contredisent la définition de la composante.

Théorème 8. *Si la définition de la fonction $F(A)$ est donnée en termes des trois opérations logiques: $X + Y$, $X \times Y$ et $X - Y$ et de l'opération topologique X' , on a*

$$(9) \quad (F(A))^* = F(A^*) - v.$$

Démonstration. On prouve aisément que $F(A)$ est une fonction topologique, c'est-à-dire qu'elle satisfait à l'égalité

$$(10) \quad H(F(A)) = F(H(A))$$

quelle que soit la fonction $H(X)$ biunivoque et bicontinue dans l'espace.

Désignons par $F_v(A)$ la fonction $F(A)$ relativisée par rapport à l'ensemble $1 - v$. En d'autres termes: $F_v(A)$ s'obtient de A à l'aide des opérations: $X - v + Y - v$, $(X - v)(Y - v)$, $(X - v) - (Y - v)$ et $(X - v)' - v$. D'après le théorème 6 et la formule (10) on a donc

$$(11) \quad (F_v(A))^* = F_v(A^*).$$

Or, remarquons que

$$(12) \quad F_v(A) = F(A) - v,$$

car

$$X - v + Y - v = (X + Y) - v, \quad (X - v)(Y - v) = XY - v,$$

$$(X - v) - (Y - v) = (X - Y) - v, \quad (X - v)' - v = X' - v.$$

Les formules (11) et (12) donnent

$$(F(A) - v)^* = F(A^*) - v;$$

d'où on tire l'égalité (9), en vertu du th. 2.

C. Q. F. D.

En posant dans le théorème 8, en particulier, $F(A) = \bar{A}$ et $F(A) = A'$, on en déduit les formules

$$(\bar{A})^* = \bar{A}^* - v, \quad A'^* = A^{**} - v \quad (\text{l'ax. III}),$$

$$(\bar{A}^*)^* = \bar{A} - v, \quad A^{**} = A' - v.$$

D'après la première de ces formules, si A est fermé, $A^* + v$ l'est aussi.

On peut déduire de la formule (9), entre autres, des théorèmes sur l'inversion du bord de A , de l'intérieur de A , de la frontière de A ; il faut à cet effet substituer dans la formule (9) à $F(A)$ respectivement les fonctions

$$A(1 - A)', \quad A - (1 - A)', \quad \overline{A1 - A}.$$

§ 4. Les ensembles non bornés.

Théorème 9. *Pour que l'ensemble A^* soit non borné, il faut et il suffit que $v \in A'$.*

Démonstration. En vertu de l'axiome IV la condition est suffisante.

Soit

$$(13) \quad v \text{ non } \in A'.$$

Il s'agit de prouver que A^* est borné. Nous allons considérer séparément le cas de l'espace à $n = 1$ dimension et le cas $n \geq 2$.

1°. D'après (13) on peut entourer le point v d'un segment ab qui ne contient outre v aucun point de A . Posons

$$Z = 1 - \text{l'ensemble des points } a, v, b.$$

Z est donc formé de 4 composantes:

$$(-\infty a), (av), (vb) (b\infty).$$

Par définition de ab , on a

$$(14) \quad A - v \subset (-\infty a) + (b\infty).$$

D'après le théorème 7, l'ensemble Z^* est formé des composantes:

$$(-\infty a)^*, (av)^*, (vb)^*, (b\infty)^*.$$

Selon l'axiome IV, les composantes $(av)^*$ et $(bv)^*$ sont non bornées. Nous allons prouver que les deux autres sont bornées.

En effet, si un ensemble borné E est situé dans l'espace linéaire 1, l'ensemble $1 - E$ ne peut contenir plus de deux composantes non bornées, car, r étant un nombre réel suffisamment grand, tous les points des rayons $(-r, -\infty)$ et $(+r, +\infty)$ appartiennent à $1 - E$.

Or, l'ensemble formé des 3 points a^* , b^* et v étant évidemment borné, son complémentaire Z^* ne contient que deux composantes non bornées. Ainsi, l'ensemble

$$(-\infty a)^* + (b\infty)^*$$

est borné.

On en conclut, en vertu de (14), I et du th. 2, que

$$A^* = (A - v)^* \subset (-\infty a)^* + (b\infty)^*,$$

ce qui prouve que A^* est borné.

2°. Le cas de l'espace à $n \geq 2$ dimensions est analogue.

On entoure le point v d'une sphère (à n dimensions) qui ne contient outre v aucun point de A . La surface S de cette sphère décompose l'espace en deux régions. L'ensemble $1 - S - v$ est donc formé de deux composantes C_1 et C_2 telles que

$$(15) \quad v \in C_1' \quad \text{et} \quad A - v \subset C_2.$$

L'ensemble S étant fermé et borné, il en est de même (selon le th. 6) de S^* . Il n'y a donc qu'une seule composante non bornée dans l'ensemble $1 - S^* - v$, car tous les points situés au-delà d'une sphère à rayon suffisamment grand appartiennent à une seule composante de $1 - S^* - v$. Les ensembles C_1^* et C_2^* étant les composantes de $1 - S^* - v$, ça ne peut être C_2^* qui soit non bornée, car d'après (15) et IV, l'ensemble C_1^* est non borné. Or,

$$A^* = (A - v)^* \subset C_2^*$$

et on en conclut que, C_2^* étant borné, A^* l'est à plus forte raison.

Corollaire. Pour que l'ensemble A soit non borné, il faut et il suffit que $v \in A^*$.

Car, l'hypothèse que A est non borné équivaut à celle que $A - v$ est non borné; mais $A - v = A^{**}$ et pour que l'ensemble A^{**} soit non borné il faut et il suffit, d'après le théorème 9, que $v \in A^*$.

§ 5. L'analyse logique des axiomes I—IV.

1. *Le système d'axiomes I—IV est catégorique.*

Cela revient à dire que, v étant un point donné d'avance et $F(X)$ et $G(X)$ deux fonctions satisfaisant aux axiomes I—IV, il existe une transformation biunivoque et bicontinue de l'espace en lui-même qui transforme $F(X)$ en $G(X)$ quel que soit X .

Posons

$$\begin{cases} H(v) = v \\ H(X) = G(F(X)), \text{ lorsque } X \neq v. \end{cases}$$

Nous allons prouver que $H(X)$ présente la transformation cherchée.

D'après le théorème 6, $H(X)$ transforme l'ensemble $1 - v$ en lui-même de façon biunivoque et bicontinue. Pour démontrer que l'espace tout entier se transforme simultanément de la même façon, il suffit donc d'établir l'égalité

$$H(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n)$$

pour le cas où $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = v$.

En d'autres termes, il s'agit de prouver que, si

$$(16) \quad A' = v$$

et

$$(17) \quad A \text{ est borné,}$$

alors

$$(18) \quad (H(A))' = v$$

et

$$(19) \quad H(A) \text{ est borné.}$$

Or, d'après (16) et le th. 1:

$$F(A') = F(v) = 0,$$

d'où, selon III:

$$(F(A))' - v = 0.$$

Mais, d'après (17) et le corollaire du théorème 9: $v \text{ non } \varepsilon(F(A))'$; par conséquent

$$(20) \quad (F(A))' = 0$$

et, d'après (16) et III,

$$(21) \quad F(A) \text{ est non borné.}$$

L'égalité (20) donne

$$G(F(A))' = G(0) = 0,$$

d'où (III):

$$(GF(A))' - v = 0.$$

Mais, d'après (21) et le corollaire du théorème 9, $v \in (GF(A))'$; donc

$$(GF(A))' = v,$$

c'est-à-dire, la formule (18) est vérifiée.

La formule (19) résulte directement de (20) et du théorème 9.

2. *Les axiomes I—IV sont indépendants chacun des autres.*

Chacune des 4 interprétations suivantes de la fonction $F(X)$ prouve l'indépendance de l'axiome correspondant:

1 désigne l'espace linéaire, v le point 0, X^* est défini comme dans l'introduction de cette note;

1°: lorsque X est fini, $F(X) = X - v$; lorsque X est infini $F(X) = X^*$.

L'axiome I n'est pas réalisé, car, si on pose $X =$ le segment 01 , on a: $F(X) =$ le rayon 1∞ . Cependant, si Y désigne un ensemble fini contenant des points $0 < x < 1$, $F(Y) + F(X - Y)$ contient des points $x < 1$. Donc $F(X) \neq F(Y) + F(X - Y)$, bien que $Y + X - Y = X$.

2°: $F(p) = |p^*|$. Donc $F(X)$ contient les valeurs absolues de tous les p^* pour $p \in X$.

3°: Lorsque $\frac{1}{2} \leq |p| \leq 2$, $F(p) = p$; dans le cas contraire $F(p) = p^*$. $F(X)$ se compose des $F(p)$ pour $p \in X$.

L'axiome III n'est pas réalisé, car en posant $X =$ l'intervalle $-\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}$, $F(X')$ contient les points $\pm \frac{1}{2}$, tandis que $(F(X))' - v$ ne les contient pas.

4°: $F(X) = X - v$.

3. *Les axiomes I—IV sont compatibles.*

Cela est vrai — comme nous l'avons indiqué au § 1 — lorsque 1 désigne l'espace géométrique euclidien à n dimensions. Nous examinerons à présent ce problème dans les espaces topologiques.

Plus précisément: nous supposons donné un système d'axiomes définissant l'espace 1 pour lequel on peut définir la notion du point limite de telle façon que:

1° lorsqu'on considère 1 comme l'espace euclidien et lorsqu'on attribue à la notion de point limite son sens ordinaire, les axiomes

du système sont remplis (autrement dit: l'espace euclidien constitue une interprétation du système d'axiomes);

2° entre chaque espace satisfaisant aux axiomes du système et l'espace euclidien il existe une correspondance biunivoque et bicontinue (autrement dit: le système d'axiomes est catégorique¹⁾ par rapport aux transformations biunivoques et bicontinues de l'espace).

Dans ces hypothèses nous prouverons qu'il existe dans l'espace 1 une opération assujétie aux axiomes I—IV.

Les axiomes I—IV sont exprimés à l'aide de notions et d'opérations qui appartiennent soit à la théorie générale d'ensembles ($+$, ε , etc.) soit à l'Analysis Situs (X' , „ensemble borné“). Or, ces notions étant des invariants des transformations biunivoques et bicontinues de l'espace, l'existence dans l'espace euclidien d'une opération assujétie aux conditions I—IV entraîne l'existence d'une telle opération dans chaque espace dont la définition remplit les conditions 1° et 2°.

Soit, en effet $H(X)$ une fonction biunivoque et bicontinue qui transforme l'espace 1 en l'espace euclidien. Soit $G(H)$ la fonction inverse de $H(X)$ c'est à dire: $HG(X) = X$. Soit enfin, pour chaque sous-ensemble X de l'espace euclidien, X^* l'ensemble défini au début de cet article, le point $H(v)$ étant supposé le centre d'inversion.

Je dis que la fonction

$$F(X) = G(H(X))^*$$

satisfait aux axiomes I—IV.

En effet, la fonction $H(X)$ étant biunivoque, on a

$$H(X + Y) = H(X) + H(Y) \text{ et } G(X + Y) = G(X) + G(Y).$$

Comme, en outre, la fonction X^* satisfait à l'axiome I, on en conclut que

$$\begin{aligned} F(X + Y) &= G(H(X + Y))^* = G(H(X) + H(Y))^* = \\ &= G(H(X))^* + G(H(Y))^* = F(X) + F(Y), \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'opération $F(X)$ satisfait à l'axiome I.

D'une façon analogue:

$$\begin{aligned} FF(X) &= G[HG(H(X))^*]^* = G(H(X))^{**} = G(H(X) - H(v)) = X - v. \\ F(X') &= G(H(X'))^* = G(H(X))^{*' } = G[(H(X))^{*' } - H(v)] = (F(X))' - v. \end{aligned}$$

¹⁾ Pour des exemples de tels systèmes (au cas de l'espace à 1 et à 2 dimensions) voir: R. L. Moore: *On the linear continuum*, Bull. Amer. Math. Soc. XXII, 1915 et *On the foundations of plane analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. 17, 1916. N. J. Wiener: *The group of the linear continuum*, Proceed. London Math. Soc. 20, 1920 et Publications of the Mass. Inst. of Technology 1922.

Enfin, si $v \in X'$, on a $H(v) \in (H(X))'$, ce qui entraîne que $(H(X))^*$ est non borné. La fonction $G(X)$ étant biunivoque et bicontinue, l'ensemble $F(X) = G(H(X))^*$ est également non borné. C. Q. F. D.

Ainsi le problème de la compatibilité des axiomes I—IV dans les espaces topologiques est résolu.

Or, la solution que nous venons de donner n'est pas effective; c'est-à-dire, nous n'avons établi que l'existence d'une opération satisfaisant aux axiomes I—IV, sans en définir aucune individuellement. Nous ne nous sommes appuyés, en effet, que sur l'existence d'une transformation biunivoque et bicontinue $H(X)$ de 1 en l'espace euclidien, sans que $H(X)$ désigne une fonction individuelle bien déterminée.

Nous avons vu, d'autre part, que pour le cas de l'espace géométrique (euclidien) le même problème peut être résolu d'une façon effective: l'inversion telle qu'elle a été définie dans l'introduction de cet article satisfait aux axiomes I—IV. Cette définition reposant sur des notions métriques, le problème s'impose: peut-on définir une opération assujétie aux conditions I—IV en se servant uniquement des invariants des transformations biunivoques et bicontinues de l'espace. Autrement dit: peut-on résoudre d'une façon effective le problème de la compatibilité des axiomes I—IV pour les espaces topologiques?

La solution négative de ce problème résulte du théorème suivant:

Aucune opération $F(X, y)$ satisfaisant aux axiomes I—IV (le point y étant considéré comme centre d'inversion) ne peut remplir l'égalité

$$(22) \quad F(H(X), H(y)) = H(F(X, y))$$

pour chaque fonction $H(X)$ biunivoque et bicontinue dans l'espace.

Démonstration. Supposons, par contre, que la fonction $F(X, y)$ satisfasse aux axiomes I—IV et à l'égalité (22).

Assignons à y une valeur fixe v et envisageons le cas où l'ensemble X se réduit à un seul point $p \neq v$. D'après le théorème 6, $F(X, y)$ se compose d'un seul point; désignons le par q . On a donc

$$(23) \quad F(p, v) = q$$

et, selon le th. 2, $q \neq v$.

Nous pouvons, en outre, assujétir le point \bar{p} à la condition $q \neq p$, car si on avait, pour chaque x distinct de v , $F(x, v) = x$, l'axiome IV ne pourrait être rempli.

Soit r un point satisfaisant aux inégalités

$$(24) \quad \begin{aligned} r \neq v, \quad r \neq p \\ r \neq q. \end{aligned}$$

(Pour le cas de l'espace linéaire nous supposerons, en outre, que ni v ni p n'est situé entre r et q). Les points p, q, r et v étant tous différents les uns des autres, on peut transformer l'espace 1 en lui même à l'aide d'une fonction biunivoque et bicontinue $H(X)$ qui remplisse les conditions

$$(25) \quad H(p) = p, \quad H(v) = v$$

$$(26) \quad H(q) = r.$$

Les égalités (22) et (25) donnent

$$F(H(p), H(v)) = F(p, v) = HF(p, v)$$

ce qui entraîne, en vertu de (23) et (26), l'égalité

$$q = H(q) = r,$$

qui contredit l'inégalité (24).

C. Q. F. D