Sur une fonction analytique partout continue.

Par

Paul Urysohn (Moscou).

L'exemple dû à M. Pompeiu[1]) d'une fonction analytique $f(z)$ partout continue, nulle à l'infini et ayant pour points singuliers les points d'un ensemble parfait discontinu P, est devenu aujourd'hui classique. Dans cet exemple l'ensemble P a une mesure positive. L'existence de fonctions à propriétés analogues, mais avec un ensemble P de mesure nulle, a été affirmée par M. Denjoy[2]).

M. M. Lusin et Menchoff ont démontré[3]) que, en suivant la méthode de construction indiquée par M. Denjoy, on obtient réellement une fonction ayant les propriétés exigées. D'autres exemples d'une nature différente ont été donnés par M. Goloubeff dans sa Thèse[4]). Tous ces exemples sont extrêmement compliqués, et la démonstration des faits affirmés exige des calculs longs et parfois bien pénibles.

Le but de cette note est de donner un exemple simple d'une telle fonction $f(z)$. $f(z)$ est définie comme la limite d'une suite partout convergente de fonctions rationelles; la démonstration est un peu longue, mais n'exige par contre que peu de calcul. La méthode de construction employée pourrait peut-être servir à la résolution de certaines questions connexes.

[1]) *Sur la continuité des fonctions de variables complexes.* Annales de Toulouse, (2) 7 (1905), p. 314.

[2]) *Comptes Rendus*, 149 (1909), p. 258.

[3]) La démonstration n'a pas été publiée.

[4]) *Fonctions analytiques uniformes etc.* (en russe), Moscou, 1916, p. 137—149.

1. Construction de l'ensemble P.

Soit Q un carré quelconque. Divisons-le en neuf carrés égaux et désignons par $F(Q)$ la somme des quatre carrés partiels extrêmes. Si M est composé de m carrés $R_1, R_2, \dots R_m$ sans points communs, nous désignerons par $F(M)$ la somme de $4m$ carrés

$$F(R_1) + F(R_2) + \dots + F(R_m).$$

Soit Q_0 le carré $(0, 1)$; posons $(n \geqslant 0)$

$$Q_{n+1} = F(Q_n)$$

L'ensemble Q_n est composé de 4^n carrés de côtés égaux à $\frac{1}{3^n}$; on a, par conséquent,

$$\operatorname{mes}(Q_n) = (\tfrac{4}{9})^n.$$

Nous désignerons de plus par C_n l'ensemble de centres des carrés constituants Q_n; C_n est composé de 4^n points Il est à remarquer que

$$Q_n \supset Q_{n+1} + C_n,$$
$$Q_{n+1} \times C_n = 0,$$

la distance entre les deux derniers ensembles étant égale à $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3^{n+1}}$.

P sera l'ensemble de points communs à tous les Q_n:

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n = \lim_{n=\infty} Q_n.$$

C'est évidemment un ensemble parfait discontinu de mesure nulle. Si nous n'avions pas à nous servir des ensembles Q_n et C_n mentionnés, nous aurions pu définir P plus simplement comme l'ensemble des points (x, y), tels que x et y appartiennent tous les deux à l'ensemble cantorien Π (obtenu à l'aide de tripartitions).

2. Les fonctions $f_n(z)$.

Soit K un ensemble fini quelconque constitué par les points $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$; nous désignerons, pour abréger l'écriture, la somme

$$\varphi(\zeta_1) + \varphi(\zeta_2) + \dots + \varphi(\zeta_m)$$

par

$$\sum_{\zeta \subset K} \varphi(\zeta)$$

Soit alors

$$f_n(z) = \frac{1}{4^n} \sum_{\zeta \subset Q_n} \frac{1}{z - \zeta}$$

Nous allons démontrer que *la suite $f_n(z)$ converge partout vers une fonction $f(z)$ non constante, holomorphe à l'extérieur de P, nulle à l'infini et partout continue.*

3. Pour prouver que $f(x)$ existe et est holomorphe dans $E - P$[1]), il suffit évidemment de démontrer le lemme suivant:

Sur tout ensemble fermé Θ agrégé à $E - P$ la suite $f_n(z)$ converge uniformément.

D é m o n s t r a t i o n. Il existe un Q_N étranger à Θ, car, dans le cas contraire, de $Q_n \times \Theta \neq 0$ pour tout n, on déduirait $P \times \Theta \neq 0$, ce qui s'oppose à l'hypothèse $\Theta \supset E - P$. Soit δ la distance de Θ à Q_N.

Calculons la différence $f_n(z) - f_{n+m}(z)$ en un point de Θ, n étant supérieur à N. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_{4^n}$ les carrés constituant Q_n, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{4^n}$ leurs centres. On a

$$C_n = \sum_{i=1}^{4^n} (\zeta_i);$$

$$C_{n+m} \subset Q_{n+m} \subset Q_n = \sum_{i=1}^{4^n} R_i,$$

$$C_{n+m} = \sum_{i=1}^{4^n} (C_{n+m} \times R_i)$$

Par conséquent

$$f_n(z) = \frac{1}{4^{n+m}} \sum_{i=1}^{4^n} \frac{4^m}{z - \zeta_i},$$

$$f_{n+m}(z) = \frac{1}{4^{n+m}} \sum_{i=1}^{4^n} \sum_{\zeta \subset C_{n+m} \times R_i} \frac{1}{z - \zeta},$$

$$f_n(z) - f_{n+m}(z) = \frac{1}{4^{n+m}} \sum_{i=1}^{4^n} \left\{ \frac{4^m}{z - \zeta_i} - \sum_{\zeta \subset C_{n+m} \times R_i} \frac{1}{z - \zeta} \right\}.$$

[1]) Je désigne par E l'ensemble de tous les points du plan.

La distance du point ζ, appartenant au carré R_i, au centre ζ_i de ce carré est inférieure à $\frac{1}{3^n}$; par conséquent

$$\frac{1}{z-\zeta_i}-\frac{1}{z-\zeta}=\frac{\zeta_i-\zeta}{(z-\zeta_i)(z-\zeta)}$$

ne surpasse pas $\frac{1}{3^n\delta^2}$ en valeur absolue. Comme il y a justement 4^m points appartenant à $C_{n+m}\times R_i$, on voit immédiatement que l'expression entre accolades ne surpasse pas $\frac{4^m}{3^n\delta^2}$ en valeur absolue. Donc

$$|f_n(z)-f_{n+m}(z)|\leqslant\frac{1}{4^{n+m}}\cdot\frac{4^m}{3^n\delta^2}\cdot 4^n=\frac{1}{3^n\delta^2},$$

ce qui prouve la convergence uniforme.

4. On s'apperçoit aisément que $f(z)$ ne peut être constante. En effet, la somme des résidus de $f_n(z)$ est égale à 1; Γ étant p. e. une circonférence suffisamment grande, on aura donc

$$\int\limits_{\Gamma} f_n(z)\,dz=2\pi i$$

et aussi

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i,$$

ce qui prouve notre assertion.

D'autre part sur une circonférence de centre 0 et de rayon $r>\sqrt{2}$ [1]) on a

$$|f_n(z)|\leqslant\frac{1}{r-\sqrt{2}},$$

ce qui montre que $f(z)$ est nulle à l'infini.

5. Il nous reste à montrer que $f_n(z)$ converge et $f(z)$ est continue en tout point de P. Nous commencerons par démontrer le lemme suivant:

[1]) Distance maximum d'un point de Q_0 à l'origine.

Soit $S_n = \mathcal{S}\left(C_n, \frac{1}{3^{n+2}}\right)$[1]; *en tout point de l'ensemble fermé* $E - S_n$ *on aura* $|f_n(z)| \leqslant 9$.

Remarquons que $E - S_n$ est un domaine (fermé) limité par 4_n circonférences; comme $f_n(z)$ est nulle à l'infini, $|f_n(z)|$ doit atteindre sa valeur maximum sur l'une de ces circonférences, soit sur σ. Calculons la valeur maximum de $|f_n(z)|$ sur σ.

Soit ζ_0 le centre de σ et $Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_n^0$ les carrés de $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ qui contiennent ζ_0. Il est à remarquer que $S_n \subset Q_n$, et par suite $\sigma \subset Q_n^0$.

Distribuons les points de C_n en $n+1$ groupes, selon qu'ils appartiennent à

$$Q_0 - Q_1^0,\ Q_1^0 - Q_2^0,\ Q_2^0 - Q_3^0, \dots,\ Q_{n-1}^0 - Q_n^0,\ Q_n^0.$$

Ces groupes contiennent respectivement: le premier $3 \cdot \frac{4^n}{4} = 3 \cdot 4^{n-1}$ points; le second $3 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 4^n = 3 \cdot 4^{n-2}$, le troisième $3 \cdot 4^{n-3}$ points, etc.; $Q_{n-1}^0 - Q_n^0$ contient 3 points, enfin Q_n^0 contient le seul point ζ_0.

Comme

$$\sigma \subset Q_n^0 \subset Q_k^0, \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

la valeur de $|z - \zeta|$ est, pour $z \subset \sigma$ et ζ appartenant au k-ème groupe, non inférieure à la distance mutuelle de deux carrés appartenant à P_k, c. a. d. à $\frac{1}{3^k}$. La valeur absolue d'un terme du k-ème groupe $(1 \leqslant k \leqslant n)$ de la somme définissant $f_n(z)$ est par suite non supérieure à 3^k. Quant au dernier terme, $\frac{1}{z - \zeta_0}$, on a

$$\left|\frac{1}{z - \zeta_0}\right| = 3^{n+2}.$$

On a donc

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{4^n}[(3 \cdot 4^{n-1} \cdot 3 + 3 \cdot 4^{n-2} \cdot 3^2 + \dots + 3 \cdot 4^{n-k} \cdot 3^k + \dots\ 3 \cdot 3^n) + 3^{n+2}] =$$

$$= \frac{9}{4}\left[\left(1 + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}\right) + \frac{3^n}{4^{n-1}}\right] = \frac{9}{4}\left(4 - \frac{3^n}{4^{n-1}} + \frac{3^n}{4^{n-1}}\right) = 9.$$

[1] Notation de Janiszewski — l'ensemble des points éloignés de l'ensemble C_n de moins de $\frac{1}{3^{n+2}}$ (égalité exclue). Dans notre cas S_n est composé de 4^n cercles (circonférences exclues) sans points communs.

6. Nous avons vu que $S_n \subset Q_n$. Par contre $Q_{n+1} \times S_n = 0$. En effet, la distance $\varrho(Q_{n+1}, C_n)$ est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,.\,3^{n+1}} > \frac{1}{3^{n+2}};$$

par suite aucun point de Q_{n+1} ne peut appartenir à $\mathcal{S}\left(C_n, \frac{1}{3^{n+2}}\right) = S_n$. Comme

$$S_{n+m} \subset Q_{n+m} \subset Q_{n+1}, \qquad (m \geqslant 1)$$

on aura aussi

$$S_{n+m} \times S_n = 0.$$

Par conséquent, *quel que soit le point z, la suite $f_n(z)$ admet au plus un élément surpassant* 9 *en valuer absolue.* Il en résulte que,

1) en un point z de P l'oscillation limite de la suite $f_n(z)$ ne surpasse pas 18;

2) $|f(z)| \leqslant 9$ partout où $f(z)$ est définie.

7. Soit maintenant ξ un point quelconque de P, ε un nombre positif arbitraire. Soit N tel que l'on ait

$$\frac{2\,.\,3^{N+2}}{4^N} < \varepsilon,$$

et Q_N^0 le carré de Q_N contenant ξ. Décomposons, pour $n \geqslant N$, l'ensemble C_n en deux parties:

$$C_n^1 = C_n \times Q_N^0 \quad \text{et} \quad C_n^2 = C_n - C_n^1;$$

soit de même

$$P^1 = P \times Q_N^0, \quad P^2 = P - P^1.$$

$f_n(z)$ sera représentée par la somme de deux fonctions

$$f_n^1(z) = \frac{1}{4^n} \sum_{\zeta \subset C_n^1} \frac{1}{z - \zeta}$$

et

$$f_n^2(z) = \frac{1}{4^n} \sum_{\zeta \subset C_n^2} \frac{1}{z - \zeta}.$$

On démontre comme tout-à-l'heure que les suites $f_n^1(z)$ et $f_n^2(z)$ convergent — la première sur $E - P^1$, la seconde sur $E - P^2$, — vers des fonctions-limites $f^1(z)$ et $f^2(z)$ holomorphes dans les domaines cités. On a sur $E-P$ $f(z)=f^1(z)+f^2(z)$; la même relation subsiste en tout point où $f^1(z)$ et $f^2(z)$ sont simultanément définies.

En particulier la suite $f_n^2(\xi)$ converge, et $f^2(z)$ est continue au point ξ.

8. Examinons d'autre part les fonctions $f_n^1(z)$. On peut répéter presque sans changement tous les raisonnements de N° N° 5 et 6. Seulement pour $f_n^1(z)$ les N premiers groupes de termes disparaissent; en effet, les points correspondants appartiennent respectivement à

$$Q_0-Q_1^0,\ Q_1^0-Q_2^0,\dots,\ Q_{N-1}^0-Q_N^0,$$

c. à. d. à des ensembles étrangers à $C_n^1\subset Q_N^0$. Le nombre 9 est par suite remplacé par

$$\frac{1}{4^n}[(3\cdot 4^{n-(N+1)}\cdot 3^{N+1}+\dots+3\cdot 3^n)+3^{n+2}]=$$

$$=\frac{3^{N+2}}{4^{N+1}}\left[\left(1+\frac{3}{4}+\dots+\frac{3^{n-N-1}}{4^{n-N-1}}\right)+\frac{3^{n-N}}{4^{n-N-1}}\right]=\frac{3^{N+2}}{4^N}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

On voit donc que

1) la suite $f_n^1(z)$ a une oscillation limite inférieure à ε (quel que soit z);

2) $|f^1(z)|<\frac{\varepsilon}{2}$ partout où $f^1(z)$ est définie.

On en déduit que la suite $f_n(\xi)$ a une oscillation limite $\leqslant\varepsilon$, et que l'oscillation de $f(z)$ au point ξ (par rapport à l'ensemble de points où elle est définie) ne surpasse pas ε.

Le point ξ de P et ε étant arbitraires, on voit donc que

1) *la suite $f_n(z)$ est partout convergente, c. à. d. $f(z)$ est partout définie;*

2) *$f(z)$ est partout continue.* C. Q. F. D.

Moscou, le 8 juin 1921.