ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Über eine Verallgemeinerung des Jordan'schen Kurvensatzes.

Von

Stefan Straszewicz (Warschau).

Den Gegenstand dieser Arbeit bildet der Beweis des folgenden Satzes, der sich wie auch alles weitere, auf Gebilde in der euklidischen Ebene bezieht.

Satz. *Ist der Durchschnitt von zwei abgeschlossenen und beschränkten Punktmengen* $\boldsymbol{A}$ *und* $\boldsymbol{B}$ *eine Summe von zwei Komponenten*[1]) *und ist weder* $\boldsymbol{A}$ *noch* $\boldsymbol{B}$ *ein Schnitt zwischen irgend zwein von den drei Punkten* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *so gibt es unter diesen Punkten mindestens zwei, zwischen welchen auch die Vereinigungsmenge* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ *keinen Schnitt bildet.*

Ist Γ ein Kontinuum, a, b zwei seiner Punkte, und A eine abgeschlossene, a und b nicht enthaltende Teil von Γ, so sagen wir, A bildet in Γ einen *Schnitt zwischen* $\boldsymbol{a}$ *und* $\boldsymbol{b}$, oder ist ein $S(a, b; \Gamma)$, wenn jedes Teilkontinuum C von Γ, welches a und b enthält, gemeinsame Punkte mit A besitzt (Definition von S. Mazurkiewicz, Fundam. Mathematicae tom I S. 62). Ist Γ die ganze Ebene, so werden wir schlechthin sagen, A ist ein Schnitt zwischen a und b oder ein $S(a, b)$.

Im folgenden wird die obige Definition ausschliesslich in Fällen angewandt, wo das Kontinuum Γ entweder die ganze Ebene, oder eine Polygonfläche (darunter soll ein durch ein einfaches geschlos-

[1]) Komponente einer Punktmenge M = eine zusammenhängende Teilmenge A von M die nicht echter Teil einer anderen zusammenhängenden Teilmenge von M ist. Eine nichtleere Menge A heisst zusammenhängend, wenn sie nicht Summe von zwei nichtleeren Punktfremden relativ zu A abgeschlossenen Punktmengen ist.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

senes Polygon bestimmtes Gebiet mitsamt dem Randpolygon verstanden) ist. In einem solchen Falle ist A bereits ein $S(a, b, \Gamma)$ wenn es mit jedem. Streckenzug, der in Γ liegt und a und b enthält gemeinsame Punkte hat.

Der ausgesprochene Satz schliesst sich eng an die beiden, von S. Janiszewski herrührenden Sätze an [1]).

Satz A. *Ist der Durchschnitt von zwei abgeschlossenen und beschränkten Punktmengen A und B zusammenhängend oder leer, und ist weder A noch B ein Schnitt zwischen den Punkten a und b so ist auch $A+B$ kein Schnitt zwischen a und b.*

Satz B. *Wenn der Durchschnitt von zwei beschränkten Kontinuen C_2 und C_2 unzusammenhängend ist, so zerschneidet C_1+C_2 die Ebene* (d. h. es gibt Punkte, zwischen welchen C_1+C_2 einen Schnitt bildet).

Es ist zu bemerken, dass in der zitierten Arbeit von Janiszewski der Satz A unter der Voraussetzung bewiesen wird, dass A und B Kontinua sind. Die Beweisführung lässt sich jedoch für die obige Fassung des Satzes leicht abändern. Übrigens kann der allgemeinere Fall auch folgendermassen auf den Fall der Kontinua zurückgeführt werden.

Es werde angenommen, $A+B$ ist ein $S(a, b)$; dann gibt es (vgl. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre S. 343) eine Komponente M von $A+B$, die auch ein $S(a, b)$ ist, und es ist

$$M = MA + MB, \tag{1}$$

wobei keine der Mengen MA und MB leer sein kann, und somit wegen des Zusammenhanges von M auch

$$M(AB) \neq 0 \tag{2}$$

ist (der Fall $AB=0$ wird dadurch bereits ausgeschlossen). Wegen (2) ist die Menge $M+AB$ zusammenhängend und folglich

$$M + AB \subset M \tag{3}$$

also

$$AB \subset M \tag{4}$$

und hieraus

$$(MA).(MB) = AB. \tag{5}$$

[1]) S. Janiszewski, *Sur les coupures du plan faites par des continus.* Prace matem.-fizyczne, tom XXVI, 1913 (polnisch).

Da nun Summe und Durchschnitt von den abgeschlossenen Mengen MA und MB nach (1) und (5) Kontinua sind, so sind MA und MB selbst Kontinua [1]) und es kann nach dem Satze von Janiszewski ihre Summe M keinen $S(a, b)$ bilden, im Widerspruch mit der Annahme.

Aus dem oben angekündigten Satze in Verbindung mit dem Satze B ergibt sich als unmittelbare Folgerung der

Satz. *Wenn der Durchschnitt von zwei beschränkten Kontinuen C_1 und C_2, deren keines die Ebene zerschneidet, aus zwei Komponenten besteht, so zerschneidet $C_1 + C_2$ die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete* [2]).

Dieser Satz kann als Verallgemeinerung des Jordan'schen Kurvensatzes angesehen werden. Wollte man hieraus den Jordan'schen Satz als Spezialfall ableiten, so müsste allerdings noch gezeigt werden, dass ein einfacher Kurvenbogen (arc simple) die Ebene nicht zerschneidet. Dies kann etwa folgendermassen geschehen. Es sei C ein einfacher Bogen, a und b zwei beliebige Punkte der Ebene ausserhalb C und bezeichne δ eine positive Zahl, die kleiner ist, als jede der Entfernungen $\varrho(C, a)$ $\varrho(C, b)$. Zerlegen wir nun den Bogen C mittels endlichvieler Teilpunkte in Teilbogen so, dass der Durchmesser eines jeden Teiles $< \delta$ ist, so kann keiner von diesen Teilbogen einen Schnitt zwischen den Punkten a und b bilden, und somit tut es nach dem Satze A auch der ganze Bogen C nicht.

Es sollen nun zunächst drei Hilfssätze vorausgeschickt werden.

Hilfssatz I. Es sei P eine Polygonfläche mit dem Rande $F(P)$, ferner a und b zwei innere Punkte in P und A eine abgeschlossene Punktmenge in P. Ist A kein $S(a, b; P)$ so ist die Menge $A + F(P)$ ebenfalls kein $S(a, b; P)$.

Beweis. Es sei L ein Weg (Streckenzug mit endlicher Streckenzahl) in P, der a und b verbindet, und A nicht trifft. Die Entfernung $\varrho(L, A) = \delta$ ist dann positiv. Hat L gemeinsame Punkte mit $F(P)$, so lässt sich ein zweiter Weg L' von a nach b so bestimmen, dass $L' . F(P) = 0$ und $\varrho(L, L') < \delta$ ist. Es genügt zu diesem Zwecke im Gebiete P mittels Paralleler zu den Seiten von $F(P)$ in einem genügend kleinen Abstande [3]) ein Polygon Π zu konstruiren

[1]) S. Janiszewski und C. Kuratowski, Sur les continus indécomposables Fundam. Mathematicae tom I.

[2]) Gebiet = Punktmenge mit lauter inneren Punkten.

[3]) Etwa im Abstande $\delta \sin \frac{\alpha}{2}$ wo α der kleinste Winkel des Polygons $F(P)$ ist.

und die in das Ringgebiet zwischen Π und $F(P)$ fallenden Stücke von L durch entsprechende Stücke von Π zu ersetzen. Der Weg L' trifft dann die Menge $A+F(P)$ nicht, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Hilfssatz II. Es sei P eine Polygonfläche mit dem Rande $F(P)$, ferner a und b zwei Punkte in P und A und B zwei abgeschlossene und beschränkte Punktmengen in P, deren keine ein $S(a, b; P)$ ist. Ist der Durchschnitt $AB = 0$, so ist $A+B$ kein $S(a, b; P)$

B e w e i s. a) a und b sind *innere* Punkte von P. Wir betrachten die Punktmengen

$$A_1 = A + F(P)$$
$$B_1 = B + F(P).$$

Nach dem Hilfssatze I ist weder A_1 noch B_1 ein $S(a, b; P)$ ferner ist

$$A_1 B_1 = F(P).$$

Wäre nun $A+B$ ein $S(a, b; P)$, so müsste auch $A_1 + B_1$ ein $S(a, b; P)$ sein, da aber $A_1 + B_1$ den vollen Rand $F(P)$ von P enthält, und a und b innere Pnnkte von P sind, so wäre $A_1 + B_1$ auch ein $S(a, b)$. Dies steht im Widerspruch mit dem Satze A, da weder A_1 noch B_1 ein $S(a, b)$ ist und $A_1 B_1$ zusammenhängend ist.

b) a ist ein Randpunkt und b ein innerer Punkt von P. Es sei δ die positive Entfernung $\varrho(a, A+B)$. Wir wählen einen inneren Punkt a' von P so, dass der Abstand $\varrho(a, a') < \delta$ ist. Dann ist $A+B$ kein $S(a, a'; P)$ und da nach a) $A+B$ auch kein $S(a', b; P)$ ist, so ist es auch kein $S(a, b; P)$.

Analog wird auch der Fall erledigt, dass a und b beide Randpunkte von P sind.

Hilfssatz III. Es seien a und b zwei Punkte der Ebene, ferner A und B zwei abgeschlossene und beschränkte Punktmengen, deren keine ein $S(a, b)$ ist. Ist $A+B$ ein $S(a, b)$, so muss die Begrenzung derjenigen Komponente G_a resp. G_b der Komplementärmenge von $A+B$ in welcher a resp. b liegt, gemeinsame Punkte mit mindestens zwei Komponenten des Durchschnitts AB haben.

B e w e i s. Die Begrenzung von G_a sei mit F bezeichnet. Es ist

$$F \subset A + B$$

folglich

$$F = FA + FB.$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Hätte man nun

$$F.(AB) = (FA).(FB) \subset K,$$

wo K eine Komponente von AB ist, so betrachte man die Punktmenge

$$F_1 = F + K = (FA + K) + (FB + K).$$

Die Mengen $FA+K$ und $FB+K$ sind abgeschlossene Teilmengen von A resp. B, ihr Durchschnitt K ist zusammenhängend, somit kann nach dem Satze A die Menge F_1 kein $S(a, b)$ sein. Wir gelangen so zu einem Widerspruch da F_1 die volle Begrenzung F von G_a enthält, also ein $S(a, b)$ sein muss.

Wir gehen nun zum Beweise des Hauptsatzes über.

Voraussetzungen. 1) a, b, c sind 3 Punkte der Ebene.

2) A und B sind zwei abgeschlossene und beschränkte Punktmengen; weder A noch B ist ein $S(a, b)$ oder ein $S(b, c)$, oder ein $S(a, c)$.

3) Es ist

$$AB = D_1 + D_2$$

wo D_1 und D_2 abgeschlossen und zusammenhängend sind und $D_1 D_2 = 0$ ist.

Behauptung. $A + B$ ist nicht gleichzeitig ein $S(a, b)$ ein $S(b, c)$ und ein $S(a, c)$.

Beweis. Wir nehmen entgegen der Behauptung an, $A+B$ sei ein Schnitt zwischen a und b zwischen b und c, und zwischen a und c.

Es seien L_1 und L_2 zwei Wege, die a und b verbinden und zwar so, dass

$$L_1 B = 0; \quad L_2 A = 0$$

gilt. Es genügt den Beweis für den Fall zu führen, wo L_1 und L_2 ausser a und b keine weiteren Schnittpunkte haben. In der Tat, ist dem nicht so, so sei b' der (in der Richtung von a nach b) erste Punkt von $L_1 L_2$ von der Eigenschaft, dass $A+B$ ein $S(a, b')$ ist und a' sei der unmittelbar vorangehende Punkt von $L_1 L_2$. Zwei Fälle sind möglich:

α) $A+B$ ist ein $S(c, b')$. Gleichzeitig ist dann $A+B$ ein $S(a', b')$ und auch ein $S(a', c)$, da es kein $S(a', a)$ ist. Ausserdem ist weder A noch B ein $S(a', b')$ oder ein $S(a', c)$ oder ein $S(b', c)$: a' und b' sind ja als Punkte von $L_1 L_2$ sowohl untereinander als auch mit a und b durch Wege verbunden, die höchstens je eine der Mengen

A oder B treffen und daraus folgt auch ebensolche Verbindbarkeit mit c (über a oder b). Es lassen sich also für den weiteren Beweis die Punkte a, b, c durch a', b', c ersetzen da für diese die gleichen Voraussetzungen erfüllt sind, wie für jene. Dabei schneiden sich die durch a' und b' bestimmten Stücke von L_1 und L_2 nur in diesen Punkten.

β) $A+B$ ist kein $S(c, b')$. Dann muss $A+B$ ein $S(b, b')$ sein, da es sonst kein $S(b, c)$ wäre, ausserdem ist $A+B$ ein $S(a', b')$ und ein $S(a', b)$. Analog wie im Falle α) können also jetzt die Punkte a, b, c durch die Punkte a', b', b ersetzt werden.

Es darf somit ohne Schaden für die Allgemeinheit des Beweises angenommen werden, dass die Wege L_1 und L_2 ein einfaches geschlossenenes Polygon Π bilden. Die beiden durch Π in der Ebene bestimmten Polygonflächen mögen mit Γ_1 und Γ_2 bezeichnet werden. Da $A+B$, wie oben angenommen ein $S(a, b)$ ist, so folgt, dass $(A+B).\Gamma_1$ ein $S(a, b; \Gamma_1)$ und $(A+B).\Gamma_2$ ein $S(a, b; \Gamma_2)$ ist. Sowohl Γ_1 als Γ_2 muss also nach dem Hilfssatze II Punkte von AB enthalten und zwar müssen dàs innere Punkte von Γ_1 bzw. Γ_2 sein. Aus der Voraussetzung über AB folgt, wenn wir die Numerierung entsprechend einrichten, dass

$$D_1 \subset \Gamma_1, \quad D_2 \subset \Gamma_2.$$

Wir betrachten nun diejenige Komponente G_c der Komplementärmenge von $A+B$, welche den Punkt c enthält. G_c ist ein zusammenhängendes Gebiet, seine Begrenzung heisse F. Nach dem Hilfssatze III muss F sowohl mit D_1 als mit D_2 gemeinsame Punkte haben. Jede der Polygonflächen Γ_1 und Γ_2 enthält also im Innern Punkte von F, und folglich auch Punkte von G_c. Somit muss auch das Polygon $\Pi = L_1 + L_2$ Punkte von G_c enthalten. Es sei etwa $G_c L_1 \neq 0$. Dann sind 3 Möglichkeiten zu untersuchen.

1) *Es ist* $G_c L_2 \neq 0$. Es sei m ein Punkt von G_c auf L_1 und n ein Punkt von G_c auf L_2. Es sei ferner Λ ein Weg der m mit n innerhalb G_c verbindet. Wir geben ihm den Durchlaufungssinn von m nach n und bezeichnen mit s den ersten Schnittpunkt mit L_2 und mit r den letzten Schnittpunkt mit L_1 der noch vor s liegt. Dann wird durch r und s ein Stück L von Λ bestimmt, welches ausser den Endpunkten keinen Punkt mit dem Polygon Π gemeinsam hat und folglich ganz in einer der Polygonflächen Γ_1, Γ_2 etwa in Γ_1 liegt. Dann wird Γ_1 durch L in zwei Teilpolygonflächen Γ_1'

und Γ_1'' zerlegt, wobei der Rand einer jeden den Streckenzug L und einen der Punkte a, b enthält:

$$\Gamma_1 = \Gamma_1' + \Gamma_1''$$
$$a \varepsilon \Gamma_1', \quad b \varepsilon \Gamma_1'';$$

Da $(A+B) . \Gamma_1'$ ein $S(a, r; \Gamma_1')$ ist, während dies offenbar weder für $A\Gamma_1'$ noch für $B\Gamma_1'$ gilt, denn das Stück von L_1 von a bis r und andererseits das Stück von L_2 von a bis s mitsamt L bilden Verbindungen von a mit r die mit B bzw. mit A punktfremd sind, so müssen nach dem Hilfssatze II in Γ_1' und zwar in seinem Innern Punkte von AB liegen. Das gleiche gilt für Γ_1''. Wir erhalten so ein dem früheren widersprechendes Resultat, dass die in Γ_1 gelegene Teilmenge von AB nicht zusammenhängend ist.

2) *Es ist* $G_e L_2 = 0$ *aber* $FL_2 \neq 0$. Es sei p ein Punkt von FL_2. Dann muss $p \varepsilon (B - AB)$ sein. Wir bezeichnen mit K_δ einen Kreis um p als Mittelpunkt, dessen Radius δ kleiner ist, als jede der Entfernungen $\varrho(p, L_1)$, $\varrho(p, A)$. Da p ein Begrenzungspunkt von G_e ist, müssen in K_δ Punkte von G_e existieren. Es sei n ein solcher Punkt. Wenn wir nun dasjenige Stück von L_2, welches durch den ersten Schnittpunkt α und den letzten β mit K_δ bei der Durchlaufung von L_2 von a nach b bestimmt ist, ersetzen durch die Strecken von α nach n und von n nach β, so wird dadurch der Fall 2) auf den Fall 1) zurückgeführt.

3) *Es sei* $FL_2 = 0$. Der Rand F von G_e kann dargestellt werden in der Form:

$$F = F\Gamma_1 + F\Gamma_2, \tag{6}$$

andererseits ist

$$F = FA + FB, \tag{7}$$

folglich

$$F = FA + F\Gamma_1 B + F\Gamma_2 B. \tag{8}$$

Wir betrachten nun die Punktmengen

$$\begin{aligned} M &= FA + D_1 + D_2 \\ N_1 &= F\Gamma_1 B + D_1 \\ N_2 &= F\Gamma_2 B + D_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Für diese gilt offenbar

$$M \subset A, \quad N_1 \subset B, \quad N_2 \subset A \tag{10}$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

und

$$F \subset M + N_1 + N_2. \tag{11}$$

Man findet durch Ausmultiplizieren aus (9)

$$\begin{aligned} MN_1 &= D_1 \\ MN_2 &= D_2; \end{aligned} \tag{12}$$

Ebenso findet man

$$N_1 N_2 = F\Gamma_1\Gamma_2 B = F\Pi B \subset FL_2;$$

da wir aber $FL_2 = 0$ angenommen haben, so ist

$$N_1 N_2 = 0. \tag{13}$$

Da nun keine der Mengen M, N_1, N_2 infolge (10) ein $S(a, c)$ ist, so ist wegen (12) und (13) nach dem Satze A auch $M + N_1 + N_2 = (M + N_1) + N_2$ kein $S(a, c)$, also wegen (11) auch F kein $S(a, c)$. Das widerspricht aber der Tatsache, dass F als volle Begrenzung des Gebietes G_c einen Schnitt zwischen den Punkten a und c bilden muss.

Es hat sich also in allen Fällen die Unhaltbarkeit der unserem Satze widerstreitenden Annahme herausgestells und damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki