ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Sur une généralisation de la notion de la continuité approximative.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer un théorème valable pour les fonctions quelconques (mesurables ou non) dont un cas particulier est le théorème de M. Denjoy d'après lequel toute fonction mesurable est presque partout approximativement continue.

Pour simplifier l'écriture nous ne considérerons ici que les fonctions finies d'une variable réelle: l'extension de nos raisonnements aux fonctions presque partout finies de plusieurs variables (réelles ou complexes) n'offrirait pas de difficulté.

1. Soit E un ensemble linéaire donné (mesurable ou non), x_0 un point donné (appartenant à E ou non), δ un intervalle variable entourant x_0. Nous dirons que x_0 est un *point de densité extérieure relativement à* E, si

$$\lim \frac{m_e(E\delta)}{m(\delta)} = 1 \tag{1}$$

lorsque la mesure $m(\delta)$ de l'intervalle δ entourant x_0 tend vers 0 ($m_e(E\delta)$ désignant la mesure extérieure au sens de M. Lebesgue de la portion de E contenue dans l'intervalle δ).

On voit sans peine que lorsque $E \subset E_1$, tout point de densité extérieure de E est un point de densité extérieure de E_1.

On déduit sans peine du théorème connu de M. Lebesgue sur la densité des ensembles mesurables le suivant

Théorème 1: *Presque tous les points d'un ensemble* E [1] *(mesurable ou non) sont points de densité extérieure de* E [2].

En effet, quel que soit l'ensemble E, il existe toujours, comme on sait, un ensemble mesurable M contenant E et tel que $m(M) = m_e(E)$; or, il suffira évidemment de démontrer notre théorème pour les ensembles E bornés. On en déduit tout de suite qu'on a pour tout intervalle δ:

$$m(M\delta) = m_e(E\delta). \tag{2}$$

Or, d'après le théorème de Lebesgue nous avons pour presque tous les points x_0 de M:

$$\lim \frac{m(M\delta)}{m(\delta)} = 1$$

lorsque l'intervalle δ entourant x_0 tend vers x_0.

On en déduit, d'après (2), la formule (1) pour presque tous les points x_0 de M et, à plus forte raison, pour presque tous les points x_0 de $E \subset M$, c. q. f. d.

2. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ (mesurable ou non) *jouit de la propriété* P en un point x_0 si, quel que soit le nombre positif ε, l'ensemble $E(x_0, \varepsilon)$ des points x donnant lieu à l'inégalité

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

a x_0 pour point de densité extérieure [3]).

Lorsque la fonction $f(x)$ est mesurable, les ensembles $E(x_0, \varepsilon)$ sont aussi mesurables et leurs points de densité extérieure coïncident avec leurs points de densité (ou d'épaisseur *un*, comme dit M. Denjoy). Il en résulte que, pour les fonctions mesurables, la propriété P (en un point) coïncide avec la *continuité approximative* (en ce point). La propriété P présente donc une extension de la notion de la continuité approximative sur les fonctions quelconques (mesurables ou non).

[1]) C'est-à-dire: tous les points de E sauf peut-être les points formant un ensemble de mesure nulle.

[2]) Cf. ma note *Sur une extension de la notion de densité des ensembles.* C. R. t. 164.

[3]) Cf. A. Denjoy: *Bull. de la Soc. math. de France* t. 43 (1915) p. 165

On pourrait démontrer sans peine que pour qu'une fonction $f(x)$ jouisse de la propriété P en un point x_0, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble E ayant x_0 pour point de densité extérieure et tel que $f(x)$ soit continue sur E au point x_0. Cf. A. Denjoy, l. c. p. 168.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Théorème 2. *Toute fonction $f(x)$ (mesurable ou non) jouit presque partout de la propriété P.*

Ce théorème est évidemment une généralisation du théorème de M. Denjoy, d'après lequel toute fonction mesurable est approximativement continue sur une épaisseur pleine[1]).

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction donnée, ε — un nombre positif donné. Désignons par X l'ensemble de tous les nombres réels et posons

$$(3) \qquad E_k^n = \mathrm{E}\left[\frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}\right];$$

nous aurons évidemment pour tout n naturel

$$(4) \qquad X = E_0^n + E_1^n + E_{-1}^n + E_2^n + E_{-2}^n + \ldots$$

D'après le théorème 1 presque tous les points de E_k^n sont points de densité extérieure de E_k^n: nous pouvons donc poser

$$(5) \qquad E_k^n = H_k^n + N_k^n, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

où $m(N_k^n) = 0$ et tous les points de H_k^n sont points de densité extérieure de E_k^n.

En posant

$$N^n = N_0^n + N_1^n + N_{-1}^n + N_2^n + N_{-2}^n + \ldots$$

nous aurons, d'après (4) et (5), pour tout n naturel:

$$(6) \qquad X = N^n + H_0^n + H_1^n + H_{-1}^n + H_2^n + H_{-2}^n + \ldots$$

et il sera

$$m(N^n) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Il en résulte que l'ensemble

$$N = N^1 + N^2 + N^3 + \ldots$$

est de mesure nulle.

Soit maintenant x_0 un point de $X - N$, ε — un nombre positif donné quelconque. Envisageons la formule (6) pour un indice $n > 1/\varepsilon$.

D'après $N^n \subset N$, x_0 est un point de $X - N^n$: d'après (6) il existe donc un entier k tel que x_0 appartient à H_k^n et parsuite est un point de densité extérieure de l'ensemble E_k^n; d'après (3) nous avons pour les x appartenants à E_k^n:

[1]) l. c. p. 170.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n} < \varepsilon;$$

donc l'ensemble $E(x_0, \varepsilon) = \mathrm{E}[|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] \supset E_k^n$ a x_0 pour point de densité extérieure.

Le nombre positif ε étant quelconque, il en résulte que la fonction $f(x)$ jouit de la propriété P au point x_0.

L'ensemble N étant de mesure nulle, nous avons ainsi démontré le théorème 2.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki