Sur quelques propriétés topologiques du plan.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

I.

Théorème: 1) Il existe une décomposition du plan en une somme de trois ensembles dont chacun est homéomorphe d'un ensemble linéaire. 2) Il n'existe aucune décomposition du plan en une somme de deux ensembles dont chacun soit homéomorphe d'un ensemble linéaire.

Démonstration. 1) Désignons par P l'ensemble de tous les points du plan, par P_1 — l'ensemble de points de P aux coordonnées irrationelles, par P_2 — l'ensemble de points de P dont une (quelconque) de coordonnées est rationelle et l'autre irrationnelle, par P_3 — l'ensemble de points de P aux coordonnées rationnelles. Nous aurons évidemment $P = P_1 + P_2 + P_3$.

L'ensemble P_1 est, comme on sait, homéomorphe de l'ensemble de tous les nombres irrationnels [1]). L'ensemble P_2 est superposable avec un sous-ensemble de P_1, comme on le voit sans peine en le tournant autour du point $(0, 0)$ de l'angle $\theta = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ [2]). Enfin P_3 est homéomorphe de l'ensemble de tous les nombres rationnels [3]). Donc chacun d'ensembles P_1, P_2 et P_3 est homéomorphe d'un ensemble linéaire. La proposition 1) est donc démontrée.

2) Supposons que $P = A + B$, où chacun d'ensembles A et B est homéomorphe d'un ensemble linéaire. Les ensembles A et B

[1]) V. p. e. M. Fréchet: *Math. Ann.* Bd. 68 (1910), p. 154.
[2]) W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1913, p. 82.
[3]) W. Sierpiński: *Fund Math* I, p. 16.

ne peuvent être tous les deux punctiformes, puisque alors ils seraient connexes[1]) et parsuite (comme punctiformes et connexes) ne pourraient être homéomorphes d'ensembles linéaires. Donc un au moins d'ensembles A et B, soit A, contient un continu C; ce continu, comme sous-ensemble de A, est homéomorphe d'un ensemble linéaire: donc c'est un arc simple. Soit p un point de C qui n'est pas une extrémité de l'arc simple C. L'ensemble A étant homéomorphe d'un ensemble linéaire, on voit sans peine qu'il existe un entourage du point p ne contenant aucun point de $A-C$. Par conséquent (C étant un arc simple) il existe un cercle dont l'intérieur appartient à $P-A$, donc à B. Or, c'est impossible, puisque l'ensemble B, comme homéomorphe d'un ensemble linéaire, ne contient aucun point intérieur. La proposition 2) est ainsi établie.

Notre théoréme est donc démontré complètement.

Observons encore que si le plan est décomposé en une somme de trois ensembles homéomorphes d'ensembles linéaires, chacun d'eux est nécessairement punctiforme. En effet, s'il serait $P=A+B+C$, où A, B, C sont homéomorphes d'ensembles linéaires, et si A contiendrait un continu, on prouverait, comme plus haut, que $B+C$ contiendrait un domaine plan, donc ausi un ensemble homéomorphe du plan P; il en résulterait tout de suite que P serait une somme de deux ensembles homéomorphes d'ensembles linéaires, contrairement à la proposition 2).

II.

Une idée, utilisée par MM. Knaster et Kuratowski dans la construction d'un ensemble biconnexe[2]) nous permettra de construire des ensembles plans possédant quelques singularités intéressantes.

Désignons par X l'ensemble de tous les nombres réels, et soient P — un sous-ensemble dénombrable de X dense dans X, Q — un ensemble contenu dans $X-P$ qui est de deuxième catégorie de M. Baire dans tout intervalle et tel que l'ensemble $R=X-(P+Q)$ est encore dense dans X.

[1]) W. Sierpiński: *Fund. Math.* II, p. 94; B. Knaster et C. Kuratowski: *Fund. Math.* II, p. 236 (théorème XLII).

[2]) *Fund. Math.* II, p. 241.

Désignons par E l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que: 1) $x \varepsilon (P+Q)$, 2) si $x \varepsilon P$, y est rationnel, si $x \varepsilon Q$, y est irrationnel.

Je dis que deux points de E qui ont une même abscisse ne sont jamais séparés[1]).

Supposons, pour démontrer, que deux points de E, $e_1(a, b)$ et $e_2(a, c)$, où $b < c$, sont séparés, et soit $a \varepsilon Q$ (donc b et c irrationnels. Il existe donc une décomposition $E = A + B$, telle que $A\bar{B} + \bar{A}B = 0$ et que e_1 appartient à A et e_2 à B. Le point e_1 appartenant à A, il existe, d'après $A\bar{B} = 0$, un nombre positif δ_1 tel que tout point e de E ayant de e_1 une distance $\varrho(e, e_1) < \delta_1$ appartient à A. De même, d'après $e_2 \varepsilon B$, il existe un $\delta_2 > 0$ tel que tout point e de E pour lequel $\varrho(e, e_2) < \delta_2$, appartient à B. Soit δ un nombre positif $< \delta_1$ et $< \delta_2$ et soit x un nombre de Q tel que $|x - a| \leqslant \delta$. Les points $q_1(x, b)$ et $q_2(x, c)$ appartiendront évidemment à E (x étant un nombre de Q, et b et c étant irrationnels). Nous avons $\varrho(q_1, e_1) = |x - a| \leqslant \delta < \delta_1$: donc q_1 appartient à A; de même nous trouvons $q_2 \varepsilon B$. Considérons les points de E situés sur le segment $q_1 q_2$.

Soit y_x la borne supérieure de tous les nombres y tels que tous les points du segment joignant les points (x, b) et (x, y) appartiennent à A. Je dis que y_x est un nombre rationnel compris entre b et c. Le point $q_1(x, b)$ appartenant à A et le point $q_2(x, c)$ à B, il est resp. de même pour les points de E suffisamment voisins de q_1, resp. q_2: on en déduit sans peine que $b < y_x < c$. Or, le point (x, y_x) appartient évidemment à $\bar{A} . \bar{B}$: donc, A et B étant séparés, il n'appartient pas à $E = A + B$; par conséquent (d'après $x \varepsilon Q$) y_x est rationnel.

Soit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ une suite formée de tous les nombres rationnels

[1]) Quant à la définition des points séparés d'un ensemble voir *Fund. Math.* II, p. 81.

Les points d'un ensemble donné quelconque E peuvent être, comme on voit sans peine, divisés en classes (disjointes), appellées *quasi-composantes* de E (V. F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 248), telles que deux points de E appartenant à une même classe ne sont jamais séparés, et deux points appartenant à deux classes différentes sont toujours séparés. Nous pouvons donc exprimer la propriété de l'ensemble E du texte en disant que les points de E ayant une même abscisse appartiennent toujours à une même quasi-composante de E.

de l'intervalle (b, c). Désignons par Q_n le sous-ensemble de Q formé de tous les nombres x de l'intervalle $(a-\delta, a+\delta)$, pour lesquels $y_x = r_n$. L'ensemble $S = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$ sera évidemment la portion de Q contenue dans l'intervalle $(a-\delta, a+\delta)$.

L'ensemble Q_n (s'il n'est pas vide) est évidemment une projection orthogonale de l'ensemble R_n des points (x, y_x), pour lesquels $a-\delta \leqslant x \leqslant a+\delta$, $x \varepsilon Q$ et $y_x = r_n$. Or, comme nous savons, les points (x, y_x) appartiennent à $\bar{A}.\bar{B}$: donc $R_n \subset \bar{A}.\bar{B}$. Or, les points (z, r_n), où $z \varepsilon P$, appartiennent à E et, d'après $E.\bar{A}.\bar{B} = 0$, ont chacun une distance positive de l'ensemble fermée $\bar{A}.\bar{B}$, donc aussi de son sous-ensemble R_n. L'ensemble P étant dense dans X, il en résulte que l'ensemble R_n est non dense sur la droite $y = r_n$, et parsuite que sa projection orthogonale Q_n est non dense sur l'axe d'abscisses. L'ensemble $S = Q_1 + Q_2 + \ldots$ serait donc de première catégorie sur X. Or c'est impossible, puisque S est la portion de Q contenue dans l'intervalle $(a-\delta, a+\delta)$ et Q est, par hypothèse, de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Nous avons ainsi démontré que deux points de E qui ont une même abscisse $a \varepsilon Q$ ne sont jamais séparés.

Soient maintenant $e_1(a, b)$ et $e_2(a, c)$ deux points de E, et soit $a \varepsilon P$, $E = A + B$ une décomposition de E en deux ensembles séparés et supposons que $e_1 \varepsilon A$, $e_2 \varepsilon B$. Il existe donc un nombre positif δ tel que tout point e de E, pour lequel $\varrho(e, e_1) < \delta$, appartient à A, et tout point e de E, pour lequel $\varrho(e, e_2) < \delta$, appartient à B.

Soit α un nombre de Q tel que $|\alpha - a| < \frac{\delta}{2}$: un tel nombre α existe, Q étant dense dans X. Or, soient β et γ deux nombres irrationnels, tel que $|\beta - b| < \frac{\delta}{2}$ et $|\gamma - c| < \frac{\delta}{2}$: les points $e'(\alpha, \beta)$ et $e''(\alpha, \gamma)$ appartiendront évidemment à E et auront une même abscisse $\alpha \varepsilon Q$. donc ils ne peuvent être séparés. Or nous avons évidemment $\varrho(e', e_1) < \delta$ et $\varrho(e'', e_2) < \delta$, d'où il résulte, comme nous savons, que e' appartient à A et e'' à B, ce qui implique une contradiction. Nous avons ainsi démontré que deux points de E qui ont une même abscisse $a \varepsilon P$ ne peuvent être séparés.

Il est ainsi établi que deux points de E qui ont une même abscisse ne sont jamais séparés. Or, l'ensemble E est évidemment dispersé, l'ensemble E étant punctiforme sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et la projection de E étant punctiforme sur l'axe d'abscisses.

Les conditions auxquelles sont assujettis les ensembles P et Q seront évidemment réalisées si l'on prend pour Q l'ensemble de tous les nombres irrationnels et pour P — l'ensemble de toutes les fractions décimales finies. Ainsi l'ensemble formé de tous les points (x, y), où x, y sont tous les deux irrationnels, ou bien x est une fraction décimale finie et y est rationnel, est dispersé et ne contient pas de quasi-composantes bornées. (C'est donc un ensemble dispersé *quasi-connexe*) [1]).

On voit sans peine qu'on peut réaliser les conditions auxquelles doivent satisfaire P et Q de sorte que l'ensemble R soit non dénombrable. On obtient ainsi, comme on le voit sans peine, un ensemble dispersé E qui coupe le plan en une infinité non dénombrable d'ensembles (de sorte que les points appartenants à deux d'entre ces ensembles ne peuvent être joignés par un continu sans points communs avec E).

III.

Nous prouverons qu'il existe dans le plan un ensemble connexe qui est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles séparés deux à deux. (On pourrait démontrer sans difficulté qu'un tel ensemble n'existe pas dans l'espace à une dimension).

Désignons par A_n le segment (fermé) aux extrémités $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ et par B_n — l'arc de la circonférence $x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ qui reste quand on en supprime les points aux coordonnées x et y positives (B_n est donc l'ensembles de points du plan dont les coordonnées polaires ϱ et θ sont $\varrho = \frac{1}{n}$ et $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\pi$). L'ensemble $C_n = A_n + B_n$ sera évidemment un continu (arc simple) et on voit sans peine que les continus C_m et C_n sont sans point commun pour $m \neq n$. Les ensembles $C_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont donc séparés deux à deux. Posons

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$

[1]) Mazurkiewicz: *Fund. Math.* t. II, p. 201.

Je dis que l'ensemble C est connexe. En effet, supposons que $C = A + B$, où A et B sont des ensembles séparés. Les ensembles C_n étant des continus, nous avons évidemment $ABC_n = 0$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$: donc

$$(1) \qquad A = C_{m_1} + C_{m_2} + \ldots, \quad (m_1 < m_2 < \ldots)$$

$$(2) \qquad B = C_{n_1} + C_{n_2} + \ldots, \quad (n_1 < n_2 < \ldots)$$

et un au moins des ensembles A et B, soit A, contient une infinité d'ensembles C_n.

L'ensemble C_m contient le point $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n_1}\right)$ (qui est un point de A_m): donc, d'après (1), A contient les points $p_k\left(\frac{1}{m_k}, \frac{1}{n_1}\right)$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ La suite des nombres naturels m_k $(k = 1, 2, \ldots)$ croissant indéfiniment, les points p_k convergent vers le point $p\left(0, \frac{1}{n_1}\right)$ qui est un point de $B_{n_1} \subset C_{n_1}$, donc, d'après (2), un point de B.

L'ensemble $\bar{A}.B$ contiendrait donc le point p et ne pourrait être vide, contrairement à l'hypothèse que A et B sont séparés.

L'ensemble C est donc connexe et possède les propriétés désirées.

Observons que l'ensemble C ne pourrait être à la fois fermé et borné, tout en jouissant des propriétés en question [1]. Il pourrait être cependant fermé (non borné) dans l'espace à trois dimensions [2]. Or, on ne sait pas s'il en est de même pour le plan [3].

[1] W. Sierpiński: *Tôhoku Math. Journ.* Vol. 13 (1918) p. 300.
[2] W. Sierpiński: *Wiadomości matematyczne* t. 23. (1919) p. 188.
[3] Cf. *Fund. Math.* II, p. 286 (Problème 13).