this property if and only if for any two different intervals A_ι and $A_{\iota'}$ of the partition the relation $x<y$ for any $x \in A_\iota$ and any $y \in A_{\iota'}$ implies that $A_\iota < A_{\iota'}$. In this case we shall call $\{A_\iota\}_I$ a p.-ordered partition. If the partial order induced in I is an order relation we shall call it an ordered partition. The type of a p.-ordered partition is the partial order type induced in the set of indices. Hence a partition of real type is always ordered, but an enumerable p.-ordered partition may not be an ordered partition.

With these remarks in mind it is easy to extend the notions and theorems of the present paper to partially ordered sets. Since we consider mostly partitions of real type this extension will deal essentially only with ordered partitions of p.-ordered sets.

We add finally that following a communication by A. Tarski, the considerations and results of the present paper con be extended to types of general relations. The main additional tool used in this extension is a theorem proved by A. Tarski and Bjarni Jónson (as yet not published) that every relations-type admits of a unique ***ordered*** partition into indecomposable relations-types (a relations-type ξ is called indecomposable if $\xi=\alpha+\beta$ implies $\alpha=0$ or $\beta=0$).

Sur la représentation des ensembles ordonnés.

Par

Miroslav Novotný (Brno).

M. W. Sierpiński a prouvé[1]) le théorème suivant: ν étant un nombre ordinal quelconque, tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_\nu$ est semblable à un ensemble de suites transfinies de type ω_ν, formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences. Pour les continus ordonnés, M. J. Novák a établi[2]) le résultat suivant: Soit C un continu ordonné dont la séparabilité soit égale à $\mathfrak{m}(C)$. Il existe un nombre ordinal ϑ de puissance au plus égale à $\mathfrak{m}(C)$, tel que C est semblable à un ensemble de suites transfinies de type $\leqslant\vartheta$ formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences. Il a posé le problème, s'il est possible de poser ϑ égal au nombre ordinal initial de puissance $\mathfrak{m}(C)$. Le théorème 1 du travail présent donne une réponse affirmative.

M. J. Novák a prouvé[3]) le théorème suivant: Soit P un continu ordonné; $\mathfrak{P}$ un système disjoint d'intervalles fermés et de sous-ensembles de P composés d'un seul point. Supposons que $\mathfrak{P}$ possède au moins deux éléments et qu'on ait $\cup\mathfrak{P}=P$. Dans ces hypothèses, $\mathfrak{P}$ est un continu ordonné.

Dans le théorème 2, j'ai établi ce résultat inverse: Tout continu ordonné est semblable à un système $\overline{M}$ d'intervalles fermés et de sous-ensembles composés d'un seul point d'un certain continu ordonné V_{ω_ν}, ce système vérifiant la relation $\cup\overline{M}=V_{\omega_\nu}$.

Enfin, M. Novák a défini[2]) un système $\mathfrak{P}$ d'intervalles fermés du continu ordonné C jouissant de certaines propriétés qu'il

[1]) W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fundamenta Mathematicae **34** (1949), p. 56.

[2]) J. Novák, *On Partition of an Ordered Continuum*, Fundamenta Mathematicae **39** (1952).

[3]) J. Novák, *On some Ordered Continua of Power $2^{\aleph_0}$ Containing a Dense Subset of Power $\aleph_1$*, Czechoslovak Mathematical Journal **76** (1951), 63-79.

appelle *partition* du continu C. A toute partition, il a fait correspondre un nombre ordinal $\alpha(\mathfrak{P})$ qui est dit *ordre de la partition* du continu C. La séparabilité du continu C étant égale à $\mathfrak{m}(C)$, il existe, d'après le théorème 3 du travail présent, une partition de C dont l'ordre est au plus égal au nombre ordinal initial de puissance $\mathfrak{m}(C)$ ce qui est la solution d'un problème de M. Novák.

Soit M un ensemble ordonné non vide. D'après Hausdorff[4], on dit que son sous-ensemble non vide $H \subset M$ est ***dense*** en M, s'il existe un couple d'éléments $a' < b'$ de H correspondant à tout couple d'éléments $a < b$ de M tel que $a \leqslant a' < b' \leqslant b$. J'appelle ***séparabilité ordinale***[5] de l'ensemble M la puissance minimale de sous-ensemble H dense en M.

D'après M. Sierpiński[1]), désignons par le symbole U_{ω_ν} l'ensemble de toutes les suites transfinies de type ω_ν formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences. Cet ensemble est dépourvu de lacunes selon le lemme I de M. Sierpiński.

Théorème 1. *ν étant un nombre ordinal donné quelconque, tout ensemble ordonné de séparabilité ordinale $\aleph_\nu$ est semblable à un ensemble de suites transfinies de type ω_ν, formées de nombres* 0 *et* 1 *et ordonnées d'après le principe de premières différences.*

Démonstration. Soit M l'ensemble ordonné donné, H son sous-ensemble dense en M de puissance $\aleph_\nu$: nous pouvons supposer sans restriction de généralité que les points extrêmes de l'ensemble M — si ceux-ci existent — appartiennent à l'ensemble H. D'après le théorème I de M. Sierpiński, l'ensemble H est semblable à un ensemble de suites transfinies de type ω_ν formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences. Désignons par le symbole H^* ce dernier ensemble. Si l'ensemble $M-H$ est vide, le théorème est établi. Au contraire, si $M-H$ est non vide, tout élément $a \in M-H$ définit une lacune $[A,B]$ de H. Une lacune

[4]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), p. 89.

[5]) Si M est un continu ordonné, la séparabilité ordinale est égale à la séparabilité topologique. Si M n'est pas un continu, les deux séparabilités peuvent être différentes, comme il résulte de l'exemple suivant: Soit M le système de tous les couples (x,y), où x est un nombre réel et $y=0$ ou $y=1$. Si x est rationnel, et seulement dans ce cas, il est toujours $y=0$. La séparabilité ordinale de l'ensemble M, ordonné d'après le principe de premières différences, est égale à $2^{\aleph_0}$ tandis que la séparabilité topologique est égale à $\aleph_0$.

$[A^*, B^*]$ de l'ensemble H^* semblable à H correspond à la lacune $[A,B]$. Faisons correspondre à la lacune $[A^*,B^*]$ une suite transfinie $a^* = \{a_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ de type ω_ν formée de nombres 0 et 1 et définie par la construction suivante:

L'ensemble H^* est un sous-ensemble de U_{ω_ν}. Définissons une coupure de U_{ω_ν} dont la section finissante est formée de tous les éléments de U_{ω_ν} ultérieurs à tous ceux de A^*; la section commençante est formée de tous les autres éléments de U_{ω_ν}. Cette coupure n'est pas une lacune; par conséquent, elle définit un ou deux éléments de U_{ω_ν}. Désignons par le symbole a^* l'élément minimal de l'ensemble U_{ω_ν} défini par cette coupure. Pour tout $c^* \in A^*$, nous avons évidemment $c^* \geqslant a^*$; l'identité est exclue, car sinon $[A^*,B^*]$ ne serait pas une lacune. Pareillement, pour tout élément $d^* \in B^*$, nous avons $d^* > a^*$.

Alors, tout élément $a \in M-H$ peut être représenté par la suite $a^* = \{a_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ définie ci-dessus. Le théorème est établi.

Soit P un ensemble ordonné, $\mathfrak{S}$ un système disjoint d'intervalles et de sous-ensembles de P composés d'un seul point vérifiant la relation $\bigcup \mathfrak{S} \subset P$. Soit X, Y deux éléments quelconques de $\mathfrak{S}$. Posons $X < Y$, si $x < y$ dans P pour tous les éléments $x \in X$, $X \subset P$ et pour tous les éléments $y \in Y$, $Y \subset P$. Par ce procédé, une relation d'ordre de l'ensemble $\mathfrak{S}$ est définie.

Désignons par le symbole Γ_{ω_ν} l'ensemble obtenu de l'ensemble U_{ω_ν} en identifiant les suites $\{x_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, $\{y_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ pour lesquelles existe un indice $\delta < \omega_\nu$ tel que $x_\lambda = y_\lambda$ pour tout $\lambda < \delta$, $x_\delta + y_\delta = 1$, $x_\lambda \neq x_\delta$, $y_\lambda \neq y_\delta$ pour tout $\lambda > \delta$. L'ensemble Γ_{ω_ν} est un continu ordonné.

Théorème 2. *Soit ν un nombre ordinal donné quelconque. Tout continu ordonné de séparabilité $\aleph_\nu$ est semblable à un système disjoint $\overline{\mathfrak{M}}$ d'intervalles fermés et de sous-ensembles composés d'un seul point du continu Γ_{ω_ν}, ce système vérifiant la relation $\bigcup \overline{\mathfrak{M}} = \Gamma_{\omega_\nu}$.*

Démonstration. Soit M le continu donné et M^* l'ensemble de suites transfinies de type ω_ν formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences, l'ensemble M^* étant semblable à M d'après le théorème 1; M^* est un sous-ensemble de Γ_{ω_ν}.

Soit $x \in M^*$ un élément quelconque. Désignons par A l'ensemble de tous les éléments $t \in M^*$ tels que $t < x$, par B l'ensemble de tous les éléments $z \in M^*$ tels que $z > x$.

Si $A \neq 0$, définissons une coupure de l'ensemble V_{ω_ν} dont la section finissante est formée de tous les éléments de V_{ω_ν} ultérieurs à tous ceux de A, la section commençante de tous les autres éléments de V_{ω_ν}. Cette coupure définit un seul élément $a \in V_{\omega_\nu}$, parce que V_{ω_ν} est un continu ordonné. Si $A=0$, posons $a=\{a_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, où $a_\lambda=0$ pour tout $\lambda<\omega_\nu$. Pour tout $c \in A$, nous avons $c \leqslant a$ et l'identité est exclue, parce que A est dépourvu de dernier élément. Alors $c<a$; pareillement, pour tout $d \in B$, on a $a<d$.

Par un procédé analogue, nous allons définir encore un élément du continu V_{ω_ν} appartenant au couple de sous-ensembles A, B. Si $B \neq 0$, définissons une coupure de V_{ω_ν} dont la section commençante est formée de tous les éléments de V_{ω_ν} antérieurs à tous ceux de B, la section finissante de tous les autres éléments de V_{ω_ν}. Soit b le seul élément défini par la coupure. Si $B=0$, posons $b=\{b_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ où $b=1$ pour tout $\lambda<\omega_\lambda$. Ainsi, comme ci-dessus, nous avons $c<b<d$ pour tout $c \in A$, $d \in B$. On a évidemment $a \leqslant b$.

Soit $\bar{a}=\langle a,b\rangle$, si $a<b$, et $\bar{a}=(a)$, si $a=b$. Désignons par le symbole $\bar{M}$ l'ensemble de tous les intervalles fermés $\bar{a}$ et de tous les sous-ensembles $\bar{a}$ composés d'un seul point, construits à tous les éléments $x \in M^*$.

On voit sans peine que deux éléments différents $\bar{a}$, $\bar{a}_1 \in \bar{M}$ sont disjoints et que l'on a $\bigcup \bar{M}=V_{\omega_\nu}$. Un seul élément $\bar{a}=g(x) \in \bar{M}$ appartient à tout élément $x \in M^*$; on a $x \in g(x)$ et $x_1 \neq x_2$ entraîne $g(x_1) \neq g(x_2)$. Si nous ordonnns l'enosemble $\bar{M}$ par la règle rappelée ci-dessus, l'application g réalise une similitude de M^* et $\bar{M}$.

M. Novák appelle *partition* du continu C un système $\mathfrak{P}$ d'intervalles fermés de C vérifiant les axiomes suivants:

1. Pour $X \in \mathfrak{P}$, $Y \in \mathfrak{P}$, on a $X \cap Y=X$ ou $X \cap Y=Y$ ou encore $X \cap Y$ n'est pas un intervalle.

2. $C \in \mathfrak{P}$.

3. Pour $X \in \mathfrak{P}$, deux éléments $X_1, X_2 \in \mathfrak{P}$ existent tels que $X=X_1 \cup X_2$ et $X_1 \cap X_2$ est un point (appelé *point de division*).

4. L'intersection de tout système décroissant d'intervalles de $\mathfrak{P}$ est un point ou un intervalle de $\mathfrak{P}$.

M. Novák appelle *ordre d'un intervalle* $I \subset C$ le type du système de tous les intervalles $X \in \mathfrak{P}$ contenant I, ce système étant ordonné inversement à l'inclusion. L'ordre de l'intervalle $I \subset C$ étant désigné par $\alpha(I)$, *l'ordre de la partition* $\mathfrak{P}$ est le nombre ordinal minimal $\alpha(\mathfrak{P})$ tel que la relation $\alpha(I)>\alpha(\mathfrak{P})$ est inexacte pour tout $I \in \mathfrak{P}$.

Théorème 3. *ν étant un nombre ordinal donné quelconque, il existe une partition d'ordre au plus égal à ω_ν à tout continu ordonné de séparabilité $\aleph_\nu$.*

Démonstration. Soit M^* la représentation du continu M d'après le théorème 1, I un intervalle fermé quelconque de M^*. Il existe un indice minimal $\delta(I)<\omega_\nu$ tel que, pour un couple quelconque de points intérieurs de I, $x=\{x_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, $y=\{y_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, on ait $x_\lambda=y_\lambda$ pour tout $\lambda<\delta$, et qu'il existe au moins un couple de différents points intérieurs de I, $z=\{z_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, $t=\{t_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, pour lesquels on ait $z_\delta \neq t_\delta$. Evidemment, $I_1 \subset I_2$ implique $\delta(I_1) \geqslant \delta(I_2)$. Définissons le point de division de l'intervalle I par la coupure de l'ensemble de tous ses points intérieurs dont la section commençante est formée de tous les points $x=\{x_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ tels que $x_\delta=0$, la section finissante de tous les points $y=\{y_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ tels que $y_\delta=1$. On voit facilement qu'aucune de ces sections n'est vide ni composée d'un seul point.

Définissons maintenant le système $\mathfrak{P}$ d'intervalles fermés de M^* comme suit: Faisons correspondre à M^* son point de division d construit par le procédé précédent; d est un point extrême de deux intervalles fermés $I_0 \cdot < I_1$ [6]) tels que $I_0 \cup I_1=M^*$, $I_0 \cap I_1=d$. Les intervalles $I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots (\xi<\lambda)}$ étant construits pour tout $\lambda<\alpha$, où $i_\xi=0$ ou $i_\xi=1$, définissons les intervalles $I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots (\xi<\alpha)}$ comme suit: Si α est un nombre ordinal de première espèce, construisons à l'intérieur de tout intervalle $I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots (\xi<\alpha-1)}$ un point de division par le procédé précédent; ce point divise l'intervalle $I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots (\xi<\alpha-1)}$ en deux intervalles fermés $I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots 0 (\xi<\alpha)} \cdot < I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots 1 (\xi<\alpha)}$. Si α est un nombre ordinal de seconde espèce, construisons toutes les intersections $\bigcap_{\lambda<\alpha} I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots (\xi<\lambda)}$, où $i_\xi=0$ ou bien $i_\xi=1$ pour $\xi<\alpha$. Chacune de ces intersections est un intervalle fermé ou un point; dans le premier cas, nous le désignons par $I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots (\xi<\alpha)}$. Nous continuous à construire jusqu'à un certain nombre ordinal minimal ϑ, pour lequel aucun intervalle $I_{i_0 i_1 \ldots i_\xi \ldots (\xi<\vartheta)}$ n'existe. Le nombre α sera appelé *indice* de l'intervalle $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\alpha)}$.

La démonstration du théorème 3 résulte de trois lemmes qui peuvent être facilement [3]) démontrés.

[6]) $X \subset C$, $Y \subset C$ étant deux intervalles fermés du continu ordonné C, j'écris $X \cdot < Y$, si $x<y$ dans C pour tout couple de points intérieurs $x \in X$, $y \in Y$. Cf. Novák, l. c. sub [2]).

Lemme 1. Pour tout $I = I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\alpha)} \in \mathfrak{P}$ nous avons $\alpha \leqslant \delta(I)$.

Puisque $\alpha \leqslant \delta(I) < \omega_\nu$, il résulte de ce lemme que l'indice α de l'intervalle arbitraire $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\alpha)}$ du système $\mathfrak{P}$ présente la propriété $\alpha < \omega_\nu$.

Lemme 2. Pour que deux intervalles différents $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\alpha)}$, $I_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots (\lambda<\beta)}$ du système $\mathfrak{P}$ présentent la propriété $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\alpha)} \subset \subset I_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots (\lambda<\beta)}$, il faut et il suffit que $\alpha > \beta$, $i_\lambda = j_\lambda$ pour tout $\lambda < \beta$.

Lemme 3. Pour que deux intervalles $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\alpha)}$, $I_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots (\lambda<\beta)}$, du système $\mathfrak{P}$ aient un seul point commun, il faut et il suffit qu'il existe un nombre ordinal $\delta < \min(\alpha, \beta)$ tel que $i_\lambda = j_\lambda$ pour tout $\lambda < \delta$, $i_\delta + j_\delta = 1$, $i_\lambda \neq i_\delta$ pour tout λ vérifiant la relation $\delta < \lambda < \alpha$, $j_\lambda \neq j_\delta$ pour tout λ vérifiant la relation $\delta < \lambda < \beta$.

D'après les lemmes 2 et 3, dans tout couple d'intervalles du système $\mathfrak{P}$ ceux-ci sont disjoint ou n'ont qu'un seul point commun ou encore l'un d'eux est sous-ensemble de l'autre. Par conséquent, le système $\mathfrak{P}$ vérifie l'axiome 1. Les axiomes 2-4 sont vérifiés d'après la définition du système $\mathfrak{P}$; alors, $\mathfrak{P}$ est une partition. L'ordre de l'intervalle $I = I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\alpha)}$ est égal à son indice α, car tout intervalle du système $\mathfrak{P}$ contenant l'intervalle I et différent de I peut être écrit sous la forme $I_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots (\lambda<\beta)}$, où $\beta < \alpha$ et $i_\lambda = j_\lambda$ pour tout $\lambda < \beta$ d'après le lemme 2. Alors, l'ordre de la partition $\alpha(\mathfrak{P})$ est au plus égal à ω_ν d'après le lemme 1.

Nous avons construit une partition du continu M^* d'ordre $\leqslant \omega_\nu$; la similitude de M et M^* entraîne facilement l'existence de la partition du continu M d'ordre $\leqslant \omega_\nu$.

On the Concepts of Completeness and Interpretation of Formal Systems.

By

G. Kreisel (Reading).

Introduction.

1. When in the history of mathematics new methods of proof or new concepts were introduced, *e. g.* the duality principle in geometry, complex or continuous variables, doubts often arose about these methods; that is, doubts whether the methods had the properties which were expected of them. To resolve these objections required two pieces of work: stating what conditions the new methods had to satisfy, and deciding whether they did. These two problems have often been called the problem of giving foundations for the new branch of mathematics.

Now, the properties which one needs in a mathematical system, naturally depend on the applications for which the system is intended, and often one system has many interesting applications, either in mathematics or outside it as a scientific theory. It is therefore natural that the problem of foundations should have been formulated in quite different ways.

2. Hilbert decided that the problem should be formulated as the *consistency problem*, that is, the new system should be formalized so that the idea of „provability in the system" is made precise, and it should be established (by suitable methods) that not all formulae of the system are provable. This decision is readily motivated by the use of a formal system as a scientific theory (see *e. g.* [1], § 6); Hilbert's special interest in this formulation is perhaps due to the fact that his first logical investigations concerned Euclidean geometry, which is traditionally applied as a theory of a certain branch of physics.