Sur les directions singulières par rapport à un ensemble de points.

Par

S. Straszewicz (Warszawa).

Considérons dans l'espace euclidien à trois dimensions un ensemble E de points et les droites d'une direction donnée λ. S'il n'existe aucune droite de cette direction, qui contiendrait un seul point de E, nous dirons que la direction λ est *singulière* par rapport à l'ensemble E.

Cette note contient la démonstration du théorème suivant proposé par W. Sierpiński [1]):

Théorème. *L'ensemble des directions singulières, par rapport à un ensemble de points fermé et borné, est tout au plus dénombrable.*

La démonstration va se baser sur quelques propriétés simples des domaines convexes (ensembles convexes, fermés et bornés, de points).

1. Par tout point frontière d'un domaine convexe Γ passe au moins un *plan d'appui* de Γ, c'est-à-dire un plan Π tel que $\Pi\Gamma \neq 0$ et que l'ensemble Γ soit situé tout entier dans un des demi-espaces déterminés par Π. Il existe des plans d'appui de Γ (il y en a un ou deux) parallèles à un plan donné quelconque. Lorsque l'ensemble $\Pi\Gamma$ ne se réduit pas à un point ni à un segment rectiligne, il forme alors un domaine convexe plan; le plan Π sera dit, dans ce cas, *plan d'appui singulier* de Γ. L'ensemble des plans d'appui singuliers de Γ est tout au plus dénombrable.

2. A tout ensemble de points, fermé et borné E, correspond le plus petit domaine convexe $\Gamma(E)$ contenant E. Si Π est un plan d'appui de $\Gamma(E)$, l'ensemble ΠE n'est pas vide et l'on a

(1) $$\Pi\Gamma(E) = \Gamma(\Pi E)\ ^{2}).$$

[1]) W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles plans fermés et bornés*, Le Matematiche **VI** (1951).

[2]) Cf. par exemple, S. Straszewicz, *Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen*, Fundamenta Mathematicae **24** (1935), p. 141.

3. Lorsque le domaine convexe Γ est contenu dans un plan Π, les droites d'intersection de Π avec les autres plans d'appui de Γ sont dites *droites d'appui* de Γ dans Π. Leurs propriétés sont analogues à celles des plans d'appui énoncées plus haut. En particulier, l'ensemble des droites d'appui de Γ — dites *singulières* — dont les produits avec Γ sont des segments, est tout au plus dénombrable.

Si L est une droite d'appui de $\Gamma(E)$, E étant un ensemble plan fermé et borné, on a

(2) $$L\Gamma(E) = \Gamma(LE).$$

4. Soit L une droite contenant un seul point d'un domaine convexe Γ. Si Γ n'est pas contenu dans un plan traversé par la droite L, il existe un plan d'appui de Γ contenant L.

Pour mettre cela en évidence, projetons Γ parallèlement à L sur un plan Σ coupant la droite L au point a. La projection Γ' de Γ est un domaine convexe plan, et il est facile de voir, que a est un point frontière de Γ'. En effet, dans le cas contraire, le point a serait intérieur à un triangle $m'n'p'$ — projection sur Σ d'un triangle mnp contenu dans Γ. En choisissant un point q de Γ en dehors du plan mnp, on aurait un tétraèdre $mnpq$ contenu dans Γ. La droite L passant par un point intérieur au triangle mnp aurait, avec ce tétraèdre, tout un segment en commun — contrairement à l'hypothèse. Il existe donc, au point a, une droite d'appui L_1 de Γ'; le plan Π passant par L_1 et L est un plan d'appui de Γ puisque le domaine Γ, dont la projection Γ' est située dans un des demi-espaces déterminés par Π, est contenu lui-même dans ce demi-espace.

5. Passons à la démonstration du théorème énoncé au début.

Considérons un ensemble de points fermé et borné E. Nous allons montrer que toute direction λ, non singulière par rapport au domaine convexe $\Gamma(E)$, n'est non plus singulière par rapport à E.

Soit L une droite de direction λ telle que $L\Gamma(E)$ contienne un seul point x.

(α) Lorsque $\Gamma(E)$ est contenu dans un plan qui ne passe pas par la droite L, la direction λ est évidemment non singulière par rapport à E.

(β) Lorsque le cas particulier (α) n'a pas lieu, il existe un plan d'appui Π de $\Gamma(E)$ qui contient la droite L.

Considérons le domaine convexe plan $\Gamma_1 = \Pi\Gamma(E)$; en vertu de (1), on a $\Gamma_1 = \Gamma(\Pi E)$. Deux cas peuvent se présenter:

(a) La droite L est une droite d'appui de Γ_1. En vertu de (2), on a $L\Gamma_1 = \Gamma(L\Pi E) = \Gamma(LE)$, et, puisque $L\Gamma_1 = \{x\}$, on voit que $LE = \{x\}$.

(b) La droite L divise le domaine Γ_1. Comme $L\Gamma_1 = \{x\}$, l'ensemble convexe Γ_1 est dans ce cas un segment rectiligne, dont les extrémités a et b se trouvent dans Π aux côtés différents de L. Une parallèle L_1 à L, menée par le point a, est alors droite d'appui de Γ_1, et, puisque $L_1\Gamma_1 = \{a\}$, on est ramené au cas précédent.

6. Toute direction singulière par rapport à E étant aussi, d'après **5**, singulière par rapport à $\Gamma(E)$, il suffit d'établir notre théorème pour les domaines convexes.

Soit d'abord Γ un domaine convexe contenu dans un plan Π. Toute direction λ singulière par rapport à Γ est nécessairement celle d'un faisceau de droites de Π. Par conséquent, il existe, dans le plan Π, une droite d'appui L de Γ ayant la direction singulière λ. L'ensemble $L\Gamma$, n'étant pas vide, contient plus d'un point; L est, par suite, droite d'appui singulière de Γ. L'ensemble des directions singulières par rapport à Γ a donc une puissance au plus égale à la puissance de l'ensemble des droites d'appui singulières de Γ; il est, par suite, tout au plus dénombrable.

Considérons enfin un domaine convexe Γ quelconque. Supposons que les droites L_1 et L_2 aient des directions différentes λ_1, λ_2 singulières par rapport à Γ. Il existe alors un plan d'appui Π de Γ parallèle à L_1 et L_2. Les directions λ_1, λ_2 sont aussi singulières par rapport au domaine convexe $\Pi\Gamma$, donc, celui-ci n'est pas situé sur une droite; Π est, par suite, plan d'appui singulier de Γ. Nous constatons ainsi, que toute direction singulière par rapport à Γ (s'il y en a au moins deux) est direction singulière par rapport à un ensemble $\Pi\Gamma$, où Π est un plan d'appui singulier de Γ.

Mais l'ensemble des plans d'appui singuliers de Γ est tout au plus dénombrable; d'autre part, l'ensemble des directions singulières par rapport à un domaine convexe plan l'est aussi. Donc, l'ensemble des directions singulières par rapport à Γ est tout au plus dénombrable.

La démonstration est ainsi achevée. Il est à remarquer que le théorème s'étend sans difficulté à l'espace euclidien à $n > 3$ dimensions.

On the distinct sums of λ-type transfinite series obtained by permuting the elements of a fixed λ-type series.

By

S. Ginsburg (Ann Arbor, Michigan).

Sierpiński [1] has demonstrated: (1) that the number of distinct sums of all ω-type transfinite series which are permutations of the elements of a fixed ω-type series, is finite; and (2) that the sum of any ω-type series which is a permutation of the elements of a fixed, non-decreasing ω-type sequence, is independent of the permutation. The purpose of this note is to generalize those results. In particular we show: α) that for any ω_ϱ-type series $\sum\limits_{\xi<\omega_\varrho} a_\xi$, where $\omega_\varrho > \omega$ is a regular ordinal, the number of distinct sums of all the ω_ϱ series obtained by permuting the elements of Σa_ξ, is equal to or smaller than

$$\aleph_\varrho^{\aleph_\varrho} = \sum_{\xi<\varrho} \aleph_\varrho^{\aleph_\xi};$$

and β) that (2) is still true when ω is replaced by ω_ϱ.

Let $N(\sum\limits_{\xi<\lambda} a_\xi)$ be the number of distinct sums of all the λ-type series obtained by permuting the elements of the series Σa_ξ. Then

Theorem 1. *If ω_ϱ, $\varrho>0$, is a regular ordinal, then $N(\sum\limits_{\xi<\omega_\varrho} a_\xi) \leqslant \aleph_\varrho^{\aleph_\varrho}$; furthermore, if $\omega_\varrho = \omega_{\alpha+1}$, then there exists an ω_ϱ series, Σa_ξ, such that $N(\Sigma a_\xi) = \aleph_\varrho$.*

Proof. An element, a_{ξ_0}, will be said to *have property P* [1], whenever

$$\overline{\overline{\{a_\xi / a_\xi \geqslant a_{\xi_0}, \xi \geqslant \xi_0\}}} < \aleph_\varrho.$$

By generalizing Sierpiński's argument we will show that the elements $\{a_{\nu(\mu)}\}_{\mu<\lambda}$ which have property P, form a sequence of order type less than ω_ϱ. Assume the contrary, i. e., assume that $\lambda = \omega_\varrho$. To $a_{\nu(0)} = a_{\tau(0)}$ there corresponds a $\nu^*(0)$ such that $a_\xi < a_{\tau(0)}$ for $\xi \geqslant \nu^*(0)$. As $\{a_{\nu(\xi)}\}$ is an ω_ϱ sequence there exists a $\tau(1) \geqslant \nu^*(0)$ such