Sur les types ordinaux dont tous les vrais restes sont égaux.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Soit φ un type ordinal. Nous appelerons *vrai reste de* φ tout type ordinal $\varrho \neq 0$, pour lequel il existe au moins un type ordinal $\xi \neq 0$, tel que $\varphi = \xi + \varrho$.

On sait que les seuls nombres ordinaux >2 dont tous les vrais restes sont égaux, sont les nombres ω^α, où α est un nombre ordinal quelconque $\neq 0$. Pour chacun de ces nombres μ il existe un seul nombre ordinal dont tous les vrais restes sont égaux à μ.

Or, il se pose la question quels sont les types ordinaux dont tous les vrais restes sont égaux et combien il y a de types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont égaux à un type ordinal donné.

Il s'agit bien sûr des types non finis. Le type 1 n'a aucun vrai reste. Le type 2 a un seul vrai reste, à savoir 1. Le type n, où n est un nombre naturel >2, a comme vrais restes les $n-1>1$ nombres $1, 2, \ldots, n-1$.

Théorème 1. *Pour qu'il existe pour un type ordinal φ au moins un type ordinal non fini dont tous les vrais restes sont égaux à φ, il faut et il suffit qu'on ait $\varphi = \omega^\alpha$, où α est un nombre ordinal quelconque $\neq 0$.*

Démonstration. Vu ce que nous avons dit ci-dessus sur les nombres ordinaux, il suffira de démontrer que, si tous les vrais restes d'un type ordinal non fini ψ sont égaux à φ, φ est un nombre ordinal.

Supposons, pour démontrer, que ce n'est pas le cas. Soient E un ensemble ordonné du type ψ et a un élément de E, qui n'est pas son élément premier (un tel élément existe, puisque l'ensemble E, en tant que du type ψ, est infini). L'ensemble G, formé de a et de tous les éléments de E qui suivent a, en tant que vrai reste de E, est du type φ; donc, d'après l'hypothèse que φ n'est pas un nombre ordinal, il n'est pas bien ordonné. Il existe donc une suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ d'éléments de E, telle que $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \ldots \succ a$. Soit H l'ensemble de tous les éléments x de E, tels que $x \prec a_n$ pour $n=1,2,\ldots$ L'ensemble $E-H$ n'est pas vide, puisque $a_1 \in E-H$. Si $x \in E-H$, il existe un nombre naturel n tel que non $(x \prec a_n)$, donc ou $x = a_n$, ou bien $a_n \prec x$. En tout cas, on a $a_{n+1} \prec x$ et, puisque $a_{n+1} \in E-H$, il existe pour tout élément x de $E-H$ un élément de $E-H$ qui précède x. L'ensemble $E-H$ n'a donc pas d'élément premier. Or, l'ensemble $E-H$ est un vrai reste de E, il est donc du type φ, de même que l'ensemble G. Mais ceci est impossible, l'ensemble G possédant un élément premier a et l'ensemble $E-H$ ne possédant pas d'élément premier.

Nous avons ainsi démontré que φ est un nombre ordinal. Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Théorème 2. *Pour que φ soit un type ordinal dont tous les vrais restes sont du type ω^α, où α est un nombre ordinal donné >0, il faut et il suffit qu'on ait ou $\varphi = \omega^\alpha$ ou bien*

$$\varphi = \ldots + \beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + \omega^\alpha, \tag{1}$$

où β_n $(n=1,2,\ldots)$ sont des nombres ordinaux tels que $0 < \beta_n < \omega^\alpha$ pour $n=1,2,\ldots$

D é m o n s t r a t i o n. Soit E un ensemble dont tous les vrais restes sont du type ω^α. Si E est un ensemble bien ordonné, il est, comme nous le savons, du type ω^α. Supposons donc que l'ensemble E n'est pas bien ordonné. Il existe donc une suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ d'éléments de E, telle que $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$, et il n'existe aucun élément de E qui précède tous les éléments de la suite $a_1, a_2, \ldots$, puisque le vrai reste de E formé de tous les éléments de E qui suivent un tel élément, serait un ensemble qui n'est pas bien ordonné et par conséquent ne pourrait pas être du type ω^α.

Désignons par E_n l'ensemble de tous les éléments x de E, tels que ou $x = a_n$ ou bien $a_{n+1} \prec x \prec a_n$; soit E_0 l'ensemble de tous les éléments x de E, tels que ou $x = a_1$ ou bien $a_1 \prec x$. On a évidemment

$$E = \ldots + E_2 + E_1 + E_0 \tag{2}$$

et chaque élément de E_m précède chaque élément de E_n pour $0 \leqslant n < m$.

Pour $n=0,1,2,\ldots$, l'ensemble $E_n + E_{n-1} + \ldots + E_0$, en tant que vrai reste de E, est du type ω^α et, pour $n=1,2,\ldots$, l'ensemble E_n, en tant que segment de l'ensemble $E_n + E_{n-1} + \ldots + E_0$, est bien ordonné, du type $\beta_n < \omega^\alpha$. D'après (2) on a donc l'égalité (1).

D'autre part, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ étant une suite infinie quelconque de nombres ordinaux positifs $<\omega^\alpha$, on démontre sans peine que tous les vrais restes du type (1) sont égaux à ω^α, puisque tout vrai reste du type (1) est ou un reste du nombre ω^α, donc égal à ω^α, ou bien est un nombre ordinal de la forme $\gamma_n + \beta_{n-1} + \beta_{n-2} + \ldots + \beta_1 + \omega^\alpha$, où n est un nombre naturel et $\gamma_n \leqslant \beta_n$. Or, puisque $\xi + \omega^\alpha = \omega^\alpha$ pour $\xi < \omega^\alpha$, on en déduit facilement que ce nombre est $=\omega^\alpha$.

Le théorème 2 est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on peut démontrer sans difficulté que, dans le théorème 2, la formule (1) peut être remplacée par la formule

$$\varphi = \ldots + \omega^{\alpha_2} + \omega^{\alpha_1} + \omega^\alpha,$$

où α_n $(n=1,2,\ldots)$ sont des nombres ordinaux $\geqslant 0$, tels que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots < \alpha$.

Soit, en particulier, $\alpha=1$. Les nombres β_n dans la formule (1) sont dans ce cas tous $<\omega$, donc ce sont des nombres naturels. On a donc

$$\varphi = \ldots + \beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + \omega = \omega^* + \omega.$$

Il existe donc seulement deux types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω; ce sont les types ω et $\omega^* + \omega$.

Soit ensuite $\alpha=2$. On démontre sans peine qu'il existe seulement trois types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^2; ce sont les types ω^2, $\omega^* + \omega^2$ et $\omega\omega^* + \omega^2$.

On démontre pareillement que, pour n naturel, il existe seulement $n+1$ types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^n; ce sont les types ω^n et $\omega^k\omega^* + \omega^n$, où $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Examinons maintenant le cas $\alpha=\omega$.

L'ensemble de toutes les suites infinies $\beta_1, \beta_2, \ldots$ formées de nombres ordinaux $<\omega^\omega$ étant de puissance du continu, on conclut que l'ensemble Φ de tous les types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^ω, est de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$. Pour démontrer que $\overline{\overline{\Phi}} = 2^{\aleph_0}$, il suffit donc de définir $2^{\aleph_0}$ types ordinaux distincts de l'ensemble Φ.

Faisons correspondre à tout nombre réel positif x le type

$$\tau(x)=\sum_{n=\infty}^{1}\omega^{2^n(2\,\mathrm{E}\,nx+1)}+\omega^{\omega},$$

où $\mathrm{E}t$ désigne l'entier le plus grand $\leqslant t$.

On vérifie sans peine que, pour $x>0$, tous les vrais restes du type $\tau(x)$ sont $=\omega^{\omega}$. Il suffira donc de démontrer que $\tau(x)\neq\tau(y)$ pour x et y réels positifs distincts.

Soient x et y deux nombres réels positifs, $x<y$; soient X un ensemble ordonné du type $\tau(x)$ et Y un ensemble ordonné du type $\tau(y)$. On a donc

$$X=\ldots+X_2+X_1+X_0 \quad\text{et}\quad Y=\ldots+Y_2+Y_1+Y_0,$$

où

$$\overline{X}_0=\overline{Y}_0=\omega^{\omega} \quad\text{et}\quad \overline{X}_n=\omega^{2^n(2\,\mathrm{E}\,nx+1)},\quad \overline{Y}_n=\omega^{2^n(2\,\mathrm{E}\,ny+1)}$$

pour $n=1,2,\ldots$

Supposons que $\tau(x)=\tau(y)$, donc $\overline{X}=\overline{Y}$. Les ensembles X_n $(n=1,2,\ldots)$ sont bien ordonnés; soit a_n le premier élément de X_n. Puisque $\overline{X}=\overline{Y}$, dans la correspondance qui établit la similitude des ensembles X et Y, à l'élément a_n de X correspond un élément b_n de Y. Il n'existe aucun élément de X qui précède tous les éléments $a_1,a_2,\ldots$ Par conséquent il n'existe aucun élément de Y qui précède tous les éléments $b_1,b_2,\ldots$, et il en résulte tout de suite qu'il ne peut pas être $b_n\in Y_0$ pour $n=1,2,\ldots$, puisque, par exemple, tout élément de Y_1 précède tout élément de Y_0. Il existe donc un nombre naturel m tel que $b_m\,\overline{\in}\,Y_0$ et ainsi $b_k\,\overline{\in}\,Y_0$ pour $k\geqslant m$. Soit p un nombre naturel tel que

$$p>m \quad\text{et}\quad p>\frac{1}{y-x}. \tag{3}$$

On a donc $b_p\,\overline{\in}\,Y_0$ et, puisque $b_p\in Y$, il existe un nombre naturel q tel que $b_p\in Y_q$.

Or, l'ensemble Z de tous les éléments b de Y, tels que ou $b=b_{p+1}$ ou bien $b_{p+1}\prec b\prec b_p$, est semblable à l'ensemble de tous les éléments a de X, tels que ou $a=a_{p+1}$ ou bien $a_{p+1}\prec a\prec a_p$, c'est-à-dire à l'ensemble X_{p+1}. On a donc $\overline{Z}=\omega^{2^{p+1}(2\,\mathrm{E}(p+1)x+1)}$. D'autre part, puisque $b_p\in Y_q$ et $b_{p+1}\prec b_p$, on a $b_{p+1}\in Y_r$, où $r\geqslant q$. L'ensemble X_{p+1} est donc semblable à une portion de l'ensemble $Y_r+Y_{r-1}+\ldots+Y_q$. Ce dernier étant du type $\omega^{2^r(2\,\mathrm{E}\,ry+1)}+\ldots+\omega^{2^q(2\,\mathrm{E}\,qy+1)}$

et l'ensemble ZY_r étant, d'après $b_{p+1}\in Y_r$, un reste (non vide) de l'ensemble Y_r, donc un ensemble du type $\omega^{2^r(2\,\mathrm{E}\,ry+1)}$, nous concluons que l'ensemble X_{p+1} est du type

$$\omega^{2^r(2\,\mathrm{E}\,ry+1)}+\varrho, \qquad \text{où}\quad \varrho<\omega^{2^r(2\,\mathrm{E}\,ry+1)}.$$

On a donc

$$\omega^{2^{p+1}(2\,\mathrm{E}(p+1)x+1)}=\omega^{2^r(2\,\mathrm{E}\,ry+1)}+\varrho, \qquad \text{où}\quad \varrho<\omega^{2^r(2\,\mathrm{E}\,ry+1)},$$

ce qui donne

$$\omega^{2^{p+1}(2\,\mathrm{E}(p+1)x+1)}=\omega^{2^r(2\,\mathrm{E}\,ry+1)},$$

d'où

$$2^{p+1}(2\,\mathrm{E}(p+1)x+1)=2^r(2\,\mathrm{E}ry+1),$$

ce qui donne $p+1=r$ et $\mathrm{E}(p+1)x=\mathrm{E}ry=\mathrm{E}(p+1)y$, d'où $(p+1)(y-x)<1$, contrairement à (3).

L'hypothèse que $\tau(x)=\tau(y)$ implique donc une contradiction. On a donc $\tau(x)\neq\tau(y)$ pour $0<x<y$, c. q. f. d.

Nous avons démontré ainsi que *l'ensemble de tous les types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^{ω} a la puissance du continu.*

Soit maintenant α un nobre ordinal tel que $\omega\leqslant\alpha<\omega_2$, où ω_2 désigne le plus petit nombre ordinal de la quatrième classe, et soit Φ_α l'ensemble de tous les types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^{α}. On démontre comme ci-dessus que les types

$$\sum_{n=\infty}^{1}\omega^{2^n(2\,\mathrm{E}\,nx+1)}+\omega^{\alpha}$$

pour x réels positifs sont tous distincts et que tous les vrais restes de chacun de ces types sont du type ω^{α}. Il en résulte que $\overline{\overline{\Phi}}_\alpha\geqslant 2^{\aleph_0}$.

D'autre part, puisque $\omega\leqslant\alpha<\omega_2$, on a $\aleph\leqslant\omega^{\alpha}\leqslant\aleph_1$. Puisque $\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_1^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$, il existe $2^{\aleph_0}$ suites infinies de nombres ordinaux $<\omega^{\alpha}$ et il en résulte d'après le théorème 2 que $\overline{\overline{\Phi}}_\alpha\leqslant 2^{\aleph_0}$. On a donc $\overline{\overline{\Phi}}_\alpha=2^{\aleph_0}$. Nous avons ainsi le

Théorème 3. *Si n est un nombre naturel, il existe seulement $n+1$ types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^n, et si $\omega\leqslant\alpha<\omega_2$, l'ensemble de tous les types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^{α} est de puissance $2^{\aleph_0}$.*

Pour examiner le cas $\alpha \geqslant \omega_2$, nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *M étant un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$, il existe une famille F de puissance $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$ de sous-ensembles dénombrables de M, telle qu'on a*

$$\overline{\overline{DD_1}}<\aleph_0 \quad \textit{pour} \quad D \epsilon F,\ D_1 \epsilon F,\ D \neq D_1.$$

Ce lemme a été démontré en 1928 par S. Tarski[1]) comme conséquence d'un théorème plus général. Je donnerai ici une démonstration directe de notre lemme.

Démonstration du lemme. Soit M un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$. L'ensemble S de toutes les suites infinies $(m_1, m_2, \ldots)$ dont les termes sont des éléments de M (pas nécessairement distincts) est de puissance $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Or, il résulte de l'axiome de choix que ($\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal non fini) $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2+\mathfrak{m}^3+\ldots$; on en déduit que l'ensemble T de toutes les suites finies s dont les termes sont des éléments de M (pas nécessairement distincts) est de puissance $\mathfrak{m}$. On a donc $\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{M}}$ et il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble T et ceux de M; soit $f(s)$ l'élément de M correspondant à la suite s de T. Faisons maintenant correspondre à toute suite infinie $(m_1, m_2, \ldots)$ de l'ensemble S, le sous-ensemble (dénombrable) $\{f((m_1)), f((m_1, m_2)), f((m_1, m_2, m_3)), \ldots\}$ de M. On obtient ainsi une famille F de sous-ensembles dénombrables de M.

Or, si $(m_1, m_2, \ldots)$ et $(n_1, n_2, \ldots)$ sont deux suites infinies distinctes de l'ensemble S, il existe un nombre naturel k qui est le plus petit, tel que $m_k \neq n_k$; il en résulte immédiatement que les ensembles

$$\{f((m_1)), f((m_1, m_2)), \ldots\} \quad \text{et} \quad \{f((n_1)), f((n_1, n_2)), \ldots\}$$

ont seulement $k-1$ éléments communs. A deux suites distinctes de l'ensemble S qui est de puissance $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$ correspondent donc des ensembles de la famille F qui ont un ensemble fini d'éléments communs. La famille F satisfait donc aux conditions de notre lemme qui se trouve ainsi démontré.

Soit maintenant ζ un nombre ordinal >1 et α un nombre ordinal tel que $\omega_\xi \leqslant \alpha < \omega_{\xi+1}$. Il en résulte que $\overline{\omega^\alpha}=\aleph_\xi$ et on en déduit qu'il existe $\aleph_\xi^{\aleph_0}$ suites infinies dont les termes sont des nombres ordinaux $<\omega^\alpha$. Il s'ensuit donc, d'après le théorème 2, que l'ensemble Φ_α de tous les types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^α, est de puissance $\leqslant \aleph_\xi^{\aleph_0}$. Or, en utilisant notre lemme pour le cas où M est l'ensemble (de puissance $\aleph_\xi$) de tous les nombres ordinaux ω^β, où $\beta<\alpha$, on démontre, comme ci-dessus pour le cas $\alpha=\omega$, que $\overline{\overline{\Phi_\alpha}} \geqslant \aleph_\xi^{\aleph_0}$. On trouve ainsi $\overline{\overline{\Phi_\alpha}}=\aleph_\xi^{\aleph_0}$ et on obtient le

[1]) A. Tarski, Fundamenta Mathematicae **12**, *Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints*, p. 195 (Théorème 10).

Théorème 4. *ξ étant un nombre ordinal positif et α un nombre ordinal tel que $\omega_\xi \leqslant \alpha \leqslant \omega_{\xi+1}$, l'ensemble de tous les types ordinaux distincts dont tous les vrais restes sont du type ω^α est de puissance $\aleph_\xi^{\aleph_0}$.*