Sur une caractérisation des alephs [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Étant donné un ensemble Z arbitraire, Z^n désigne l'ensemble des suites à n éléments: $z_1, z_2, \dots, z_n$, où $z_k \in Z$ pour $k=1,\dots,n$. A étant un sous-ensemble de Z^n, nous dirons que *A est de puissance $<\mathfrak{m}$ dans la direction du k-ème axe*, lorsque, quel que soit l'élément $(z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+1},\dots,z_n)$ de Z^{n-1}, l'ensemble

$$\underset{z_k}{E}\{(z_1,\dots,z_{k-1},z_k,z_{k+1},\dots,z_n)\in A\}$$

est de puissance $<\mathfrak{m}$. (Si $n=1$, cela veut dire, bien entendu, que $\overline{\overline{A}}<\mathfrak{m}$).

D'après un théorème remarquable de M. Sierpiński [2]), l'hypothèse du continu équivaut à l'existence d'une décomposition de l'espace euclidien $\mathcal{E}^3$ en trois ensembles A_1, A_2, A_3 tels que, pour $k=1,2,3$, l'ensemble A_k est fini dans la direction du k-ème axe.

Je me propose d'établir dans cette note une propriété générale des alephs, qui implique en particulier le théorème de Sierpiński (cas où $a=0$ et $n=2$). Cette propriété permet de définir les nombres $\aleph_n$ pour $n=0,1,2,\dots$ sans faire intervenir ni les nombres cardinaux, ni les nombres ordinaux.

Théorème. *L'inégalité $\overline{\overline{Z}}<\aleph_{\alpha+n}$ équivaut à l'existence d'un système de $n+1$ ensembles $A_1,\dots,A_{n+1}$ tels que*

1^0: $Z^{n+1}=A_1+\dots+A_{n+1}$,

2^0: *pour $k\leqslant n+1$, l'ensemble A_k est de puissance $<\aleph_\alpha$ dans la direction du k-ème axe.*

---

[1]) Conférence faite à Praha le 28 mars 1951. Présenté partiellement à la Société Polonaise de Mathématiques, Section de Varsovie, le 9 mars 1951.

[2]) Voir C. R. Paris **232** (1951), p. 1046, et ce volume, p. 1.

Démonstration. Procédons par induction relativement à n.

Le théorème étant évident pour $n=0$, admettons qu'il soit vrai pour un entier $n-1\geqslant 0$ [3]).

1) La condition est nécessaire. Posons, par définition, pour tout nombre ordinal γ,

$$Z(\gamma)=\underset{\xi}{E}(\xi<\gamma).$$

On a donc

(1) $\overline{\overline{Z(\omega_\beta)}}=\aleph_\beta$, (2) $\overline{\overline{Z(\gamma)}}<\aleph_\beta$ pour $\gamma<\omega_\beta$,

ω_β désignant le nombre initial de puissance $\aleph_\beta$.

Pour tout $\gamma<\omega_{\alpha+n-1}$, il existe donc par hypothèse (et d'après (2)) un système de n ensembles $A_{\gamma,1},\dots,A_{\gamma,n}$ tels que:

(3) $$Z^n(\gamma+1)=A_{\gamma,1}+\dots+A_{\gamma,n},$$

(4) pour $r\leqslant n$, l'ensemble $A_{\gamma,r}$ est de puissance $<\aleph_\alpha$ dans la direction du r-ème axe.

En posant $Z=Z(\omega_{\alpha+n-1})$, ce qui est évidemment légitime, nous définirons à présent les ensembles $A_1,\dots,A_{n+1}$ de façon à satisfaire aux conditions 1^0 et 2^0. À savoir: nous admettons par définition que l'élément $(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})$ de Z^{n+1} appartient à A_k (où $k\leqslant n+1$) lorsque l'un des deux cas se présente:

(I) il existe un indice $j>k$ tel que:

(i) $\xi_j\geqslant\xi_m$ pour $m\leqslant n+1$, (i') $(\xi_1,\dots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\dots,\xi_{n+1})\in A_{\xi_j,k}$,

(II) il existe un $j<k$ tel que:

(ii) $\xi_j\geqslant\xi_m$ pour $m\leqslant n+1$, (ii') $(\xi_1,\dots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\dots,\xi_{n+1})\in A_{\xi_j,k-1}$.

La condition 1^0 est satisfaite. En effet, étant donné un élément $(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})$ de Z^{n+1}, soit ξ_j sa plus grande „coordonnée" (s'il y en a plusieurs, leur choix est arbitraire).

Comme $(\xi_1,\dots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\dots,\xi_{n+1})\in Z^n(\xi_j+1)$, il existe d'après (3) un indice $r\leqslant n$ tel que

$$(\xi_1,\dots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\dots,\xi_{n+1})\in A_{\xi_j,r}.$$

Si l'on a $j>r$, on est dans le cas (I) en posant $k=r$, et par conséquent

(5) $$(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})\in A_k.$$

---

[3]) Pour $n=1$, cf. H. Tietze, *Beiträge zur allgemeinen Topologie I*, Math. Ann. **88** (1923), p. 306.

Si l'on a $j \leqslant r$, on posera $k=r+1$. Le cas (II) se trouve alors réalisé, d'où résulte également la formule (5).

Passons à la démonstration de la condition 2^0.

Soit k un entier fixe $\leqslant n+1$. Étant donné un système de n nombres ordinaux $(<\omega_{\alpha+n-1})$: $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{n+1}$, posons — en considérant ce système comme fixe —

$$C = \underset{\xi_k}{E}\{(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \epsilon A_k\}.$$

Il s'agit de prouver que $\overline{\overline{C}} < \aleph_\alpha$.

Désignons par B_j l'ensemble des ξ_k tels que le système $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ satisfait à (i) et (i') ou à (ii) et (ii'), suivant que $j>k$ ou $j<k$. D'après la définition de A_k, on a donc

$$C = B_1 + \ldots + B_{k-1} + B_{k+1} + \ldots + B_{n+1}.$$

Il reste à prouver que

(6) $$\overline{\overline{B}}_j < \aleph_\alpha \quad \text{pour} \quad j=1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1.$$

Deux cas sont à considérer:

Si $j>k$, c'est-à-dire, si k est l'un des nombres $1, \ldots, j-1$, et la relation (i') se présente, l'inégalité (6) résulte de (4).

Si $j<k$, c'est-à-dire, si k est l'un des nombres $j+1, \ldots, n+1$, et la relation (ii') se présente, on déduit (6) de (4) en posant

$$\eta_1 = \xi_1, \ldots, \eta_{j-1} = \xi_{j-1}, \eta_j = \xi_{j+1}, \ldots, \eta_n = \xi_{n+1}.$$

2) La condition est suffisante. Supposons, par impossible, que l'ensemble $Z = Z(\omega_{\alpha+n})$ admette une décomposition satisfaisant aux conditions 1^0 et 2^0. Posons

$$S = \sum \underset{\xi_{n+1}}{E}[(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \epsilon A_{n+1}],$$

la sommation étant étendue à tous les éléments $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de l'ensemble $Z^n(\omega_{\alpha+n-1})$. L'ensemble A_{n+1} étant, d'après 2^0, de puissance $<\aleph_\alpha$ dans la direction du $n+1$-ème axe, il vient (cf. (1)):

$$\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_{\alpha+n-1}^n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+n-1} < \overline{\overline{Z}}.$$

Il en résulte l'existence d'un $\beta \epsilon (Z-S)$. Autrement dit,

(7) $$Z^n(\omega_{\alpha+n-1}) \times (\beta) \subset Z^{n+1} - A_{n+1} \subset A_1 + \ldots + A_n$$

d'après 1^0.

Posons pour $k \leqslant n$:

$$A_k^* = \underset{\xi_1 \ldots \xi_n}{E}[(\xi_1, \ldots, \xi_n, \beta) \epsilon A_k]$$

(l'ensemble $A_k^* \times (\beta)$ est donc l'intersection de A_k avec le „plan" $\xi_{n+1} = \beta$).

Il vient, d'après (7),

$$Z^n(\omega_{\alpha+n-1}) \subset A_1^* + \ldots + A_n^*.$$

Chacun des ensembles A_k^* (où $k \leqslant n$) étant de puissance $<\aleph_\alpha$ dans la direction du k-ème axe (d'après 2^0) et $Z(\omega_{\alpha+n-1})$ étant de puissance $\aleph_{\alpha+n-1}$, on parvient ainsi à une contradiction avec l'hypothèse que la condition envisagée est suffisante dans le cas de $n-1$.

Corollaire. *Pour que l'ensemble Z soit de puissance $\aleph_n$ (n entier $\geqslant 0$), il faut et il suffit que l'ensemble Z^{n+2} admette une décomposition en $n+2$ ensembles $A_1, \ldots, A_{n+2}$, où A_k est fini dans la direction du k-ème axe et que, cependant, l'ensemble Z^{n+1} n'admette pas de décomposition de ce genre en $n+1$ ensembles.*