Sur les fonctions continues d'une variable ordinale.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

La notion de limite d'une suite transfinie de nombres ordinaux est définie habituellement pour les suites transfinies croissantes de nombres ordinaux, mais on peut étendre cette notion aux suites transfinies quelconques de nombres ordinaux, en disant que le nombre ordinal λ est limite d'une suite transfinie de type φ de nombres ordinaux $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\varphi}$, où φ est un nombre ordinal de deuxième espèce, si pour tout nombre ordinal $\nu<\lambda$ il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$ tel qu'on a $\nu<\alpha_\xi\leqslant\lambda$ pour $\mu<\xi<\varphi$.

Une fonction $f(\xi)$ qui fait correspondre au nombre ordinal ξ des nombres ordinaux $f(\xi)$ sera dite *continue*, si, φ étant un nombre ordinal de deuxième espèce, on a toujours $\lim\limits_{\xi<\varphi} f(\xi)=f(\varphi)$, c'est-à-dire si, β étant un nombre ordinal quelconque, tel que $\beta<f(\varphi)$, il existe un nombre ordinal $\alpha<\varphi$, tel que $\beta<f(\xi)\leqslant f(\varphi)$ pour $\alpha<\xi<\varphi$.

La fonction $f(\xi)=\xi$ ainsi que toute fonction constante d'une variable ordinale sont évidemment continues.

La somme et le produit de deux fonctions continues d'une variable ordinale peuvent être des fonctions discontinues. Tel est par exemple le cas où chacune de deux fonctions est égale à la fonction $f(\xi)=\xi$.

En effet, si $g(\xi)=\xi+\xi$ et $h(\xi)=\xi\cdot\xi$, on a

$$\lim_{\xi<\omega} g(\xi)=\lim_{\xi<\omega}(\xi\cdot 2)=\omega\neq\omega\cdot 2=g(\omega)$$

et

$$\lim_{\xi<\omega} h(\xi)=\lim_{\xi<\omega}\xi^2=\omega\neq\omega^2=h(\omega).$$

On peut relativiser d'une façon évidente la notion de continuité d'une fonction d'une variable ordinale aux fonctions $f(\xi)$ définies seulement pour les nombres ordinaux ξ inférieures à un nombre ordinal donné α.

Théorème 1. *Toute fonction $f(\xi)$ définie pour les nombres ordinaux $\xi<\alpha$, où α est un nombre ordinal donné $<\Omega$ et dont les valeurs $f(\xi)$ sont des nombres ordinaux quelconques, est limite d'une suite infinie (de type ω) de fonctions continues $f_n(\xi)$ définies pour $\xi<\alpha$.*

Démonstration. Soit $f(\xi)$ une fonction définie pour $\xi<\alpha$, où α est un nombre ordinal $<\Omega$, et dont les valeurs sont des nombres ordinaux quelconques. Nous pouvons évidemment supposer que α est un nombre ordinal transfini. Comme $\alpha<\Omega$, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\alpha$ est dénombrable: soit

$$\xi_1, \xi_2, \dots \tag{1}$$

une suite infinie formée de tous ces nombres. n étant un nombre naturel, définissons maintenant la fonction $f_n(\xi)$ pour $\xi<\alpha$ comme il suit.

Ordonnons la suite de n nombres ordinaux $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ d'après leur grandeur: soit $\xi'_1,\xi'_2,\dots,\xi'_n$ la suite ainsi obtenue, et posons $\xi'_0=0$. Posons

$$f_n(\xi)=f(\xi'_k) \quad \text{pour} \quad \xi'_{k-1}<\xi\leqslant\xi'_k \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

et

$$f_n(\xi)=1 \quad \text{pour} \quad \xi'_n<\xi<\alpha.$$

On voit sans peine que les fonctions $f_n(\xi)$ $(n=1,2,\dots)$ sont continues pour $\xi<\alpha$ et qu'on a $f_n(\xi_k)=f(\xi_k)$ pour $n\geqslant k$. La suite (1) contenant tous les nombres ordinaux $\xi<\alpha$, il en résulte tout de suite que

$$\lim_{n<\omega} f_n(\xi)=f(\xi) \qquad \text{pour} \quad \xi<\alpha.$$

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Théorème 2. *La fonction $f(\xi)=\xi+1$ définie pour $\xi<\Omega$ n'est pas limite d'aucune suite transfinie de fonctions continues d'une variable ordinale.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite infinie (de type ω) $f_n(\xi)$ $(n=1,2,\dots)$ de fonctions continues d'une variable ordinale, définies pour $\xi<\Omega$ et telles que

$$\lim_{n<\omega} f_n(\xi)=\xi+1 \qquad \text{pour} \quad \xi<\Omega. \tag{2}$$

D'après (2) il existe pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$ un nombre naturel p_ξ tel que $f_n(\xi)=\xi+1$ pour $n\geqslant p_\xi$.

Les nombres p_ξ, où $\xi<\Omega$, ne prenant que les valeurs naturelles dont l'ensemble est dénombrable et l'ensemble de nombres ordinaux $\xi<\Omega$ étant indénombrable, il existe un nombre naturel p tel que l'égalité $p_\xi=p$ a lieu pour une infinité indénombrable de nombres ordinaux $\xi<\Omega$. Il existe donc une suite unfinie croissante de nombres ordinaux $\xi_1<\xi_2<\ldots<\Omega$ telle que $p_{\xi_i}=p$ pour $i=1,2,\ldots$ Soit $\xi_0=\lim_{i<\omega}\xi_i$; on aura donc $f_n(\xi_i)=\xi_i+1$ pour $n\geqslant p$ et $i=1,2,\ldots$, donc $\lim_{i<\omega}f_n(\xi_i)=\lim_{i<\omega}(\xi_i+1)=\xi_0$, pour $n\geqslant p$. Soit n un nombre naturel $\geqslant p$ et $\geqslant p_{\xi_0}$. On aura les égalités

$$\lim_{i<\omega}f_n(\xi_i)=\xi_0 \quad \text{et} \quad f_n(\xi_0)=\xi_0+1$$

qui prouvent, d'après $\lim_{i<\omega}\xi_i=\xi_0$, que la fonction $f_n(\xi)$ est discontinue pour $\xi=\xi_0$, ce qui est impossible.

La fonction $f(\xi)=\xi+1$ n'est pas donc, pour $\xi<\Omega$, limite d'une suite infinie de type ω de fonctions continues, ni, évidemment, d'aucun type confinal avec ω.

Supposons maintenant que la fonction $f(\xi)$ est pour $\xi<\Omega$ limite d'une suite transfinie de type $\varphi\geqslant\Omega$ de fonctions continues:

$$\lim_{\zeta<\varphi}f_\zeta(\xi)=\xi+1 \qquad \text{pour} \quad \xi<\Omega.$$

Il existe donc pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$ un nombre ordinal $\zeta_\xi<\varphi$, tel que $f_\zeta(\xi)=\xi+1$ pour $\zeta_\xi\leqslant\zeta<\varphi$. Comme $\zeta_\xi<\varphi$ pour $\xi\leqslant\omega$ et, vu que φ est un nombre de deuxième espèce qui n'est pas confinal avec ω, il existe un nombre ordinal ζ_0 tel que $\zeta_\xi<\zeta_0<\varphi$ pour $\xi\leqslant\omega$. On a donc $f_{\zeta_0}(\xi)=\xi+1$ pour $\xi\leqslant\omega$, d'où $\lim_{\xi<\omega}f_{\zeta_0}(\xi)==\omega<\omega+1=f_{\zeta_0}(\omega)$, contrairement à l'hypothèse que $f_{\zeta_0}(\xi)$ est une fonction continue.

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Théorème 3. *$f(\xi)$ étant une fonction quelconque définie pour $\xi<\Omega$ et dont les valeurs sont des nombres ordinaux, il existe pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ et tout nombre naturel n une fonction $f_{\alpha,n}(\xi)$ d'une variable ordinale, continue pour $\xi<\Omega$ et telle que*

$$(3) \qquad f(\xi)=\lim_{\alpha<\Omega}\lim_{n<\omega}f_{\alpha,n}(\xi) \quad \textit{pour} \quad \xi<\Omega.$$

Démonstration. D'après le théorème 1 il existe pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ une suite infinie $f_{\alpha,n}(\xi)$ $(n=1,2,\ldots)$ de fonctions continues d'une variable ordinale, définies pour $\xi\leqslant\alpha$, telle que $f(\xi)=\lim_{n<\omega}f_{\alpha,n}(\xi)$ pour $\xi\leqslant\alpha$. Posons $f_{\alpha,n}(\xi)=1$ pour $\alpha<\xi<\Omega$: les fonctions $f_{\alpha,n}(\xi)$, où $\alpha<\Omega$ et $n=1,2,\ldots$, seront, comme on le voit facilement, continues pour $\xi<\Omega$, et on aura la formule (3).

Le théorème 3 est ainsi démontré.

Théorème 4. *La limite d'une suite transfinie non décroissante de fonctions continues non décroissantes d'une variable ordinale est une fonction continue.*

Démonstration. Soit φ un nombre ordinal transfini de deuxième espèce et soit $\{f_\zeta(\xi)\}_{\zeta<\varphi}$ une suite transfinie non décroissante de type φ de fonctions continues non décroissantes d'une variable ordinale, et soit

$$(4) \qquad \lim_{\zeta<\varphi}f_\zeta(\xi)=f(\xi)$$

pour tout nombre ordinal ξ.

Soit λ un nombre ordinal de deuxième espèce et ν un nombre ordinal quelconque, tel que $\nu<f(\lambda)$. Comme $\lim_{\zeta<\varphi}f_\zeta(\lambda)=f(\lambda)$, il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$, tel que $\nu<f_\zeta(\lambda)\leqslant f(\lambda)$ pour $\mu<\zeta<\varphi$. Soit ζ un nombre ordinal tel que $\mu<\zeta<\varphi$. La fonction $f_\zeta(\xi)$ étant continue, il existe un nombre ordinal $\tau<\lambda$, tel que $\nu<f_\zeta(\xi)\leqslant f_\zeta(\lambda)$ pour $\tau<\xi<\lambda$. La suite $\{f_\zeta(\xi)\}_{\zeta<\varphi}$ étant non décroissante, on a, d'après (4), $f_\zeta(\xi)\leqslant f(\xi)$. On a ainsi $\nu<f(\xi)$ pour $\tau<\xi<\lambda$ et, la fonction $f(\xi)$, en tant que limite d'une suite transfinie de fonctions non décroissantes, étant, comme on le démontre facilement, non décroissante, on a $\nu<f(\xi)\leqslant f(\lambda)$ pour $\tau<\xi<\lambda$, ce qui prouve que la fonction $f(\xi)$ est continue pour $\xi=\lambda$.

Le théorème 4 est ainsi démontré.

Il est à remarquer que le théorème 4 n'est pas en général vrai pour les limites de suites transfinies qui ne sont pas non décroissantes de fonctions continues non décroissantes d'une variable ordinale, p. ex. il n'est pas vrai pour la suite infinie de fonctions continues $\{f_n(\xi)\}_{n<\omega}$, où $f_n(\xi)=1$ pour $\xi\leqslant n$ et $f_n(\xi)=\omega$ pour $\xi>n$.

Le théorème 4 n'est non plus vrai pour les limites de suites transfinies non décroissantes de fonctions continues qui ne sont pas non décroissantes, p. ex. pour la suite infinie de fonctions continues $\{f_n(\xi)\}_{n<\omega}$, où $f_n(\xi)=\omega$ pour $\xi\leqslant n$ et pour $\xi>\omega$ et $f_n(\xi)=1$ pour $n\leqslant\xi\leqslant\omega$.

Il est à remarquer que pour les fonctions réelles d'une variable réelle on a la proposition suivante:

La limite d'une suite infinie non décroissante d'une variable réelle continues partout du côté gauche est une fonction continue partout du côté gauche.

En effet, soit $f(x)=\lim_{n=\infty} f_n(x)$ la limite d'une suite infinie non décroissante de fonctions non décroissantes d'une variable réelle continues du côté gauche. Soit x_0 un nombre réel quelconque et ε un nombre positif donné. Comme $f(x_0)=\lim_{n=\infty} f_n(x_0)$, il existe un nombre naturel m tel que $f(x_0)-\varepsilon<f_m(x_0)$. On a donc $\eta=f_m(x_0)-f(x_0)+\varepsilon>0$. La fonction $f_m(x)$ étant continue au point x_0 du côté gauche, il existe un nombre $\delta>0$, tel que $f_m(x)>f_m(x_0)-\eta$, c'est-à-dire $f_m(x)>f(x_0)-\varepsilon$ pour $x_0-\delta<x<x_0$. La suite $\{f_n(x)\}_{n<\omega}$ étant non décroissante, on a d'après $\lim_{n=\infty} f_n(x)=f(x)$, $f(x)\geqslant f_m(x)$, donc $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$ pour $x_0-\delta<x<x_0$ et, la fonction $f(x)$ étant non décroissante (en tant que limite d'une suite infinie de fonctions non décroissantes) on a $f(x_0)\geqslant f(x)$ pour $x<x_0$. On a ainsi

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)\leqslant f(x_0) \quad \text{pour} \quad x_0-\delta<x<x_0,$$

ce qui prouve que la fonction $f(x)$ est continue pour $x=x_0$ du côté gauche.

Some Remarks on Automorphisms of Boolean Algebras [1]).

By

Ladislav Rieger (Praha).

The main subject of the present paper is the construction of an algebra $\mathfrak{B}$ admitting no proper homomorphic mapping onto itself [2]).

Especially, $\mathfrak{B}$ has no proper automorphism, i. e. we get a negative solution of the known problem (see (L), problem Nr 74, p. 162 and the problem listed at the end of the first edition (1939) of this book) as to whether each algebra must have a proper automorphism [3]).

The elementary construction of $\mathfrak{B}$ is essentially a topological one, i. e. we solve an equivalent topological problem in disproving the known hypothesis (see e. g. (L), p. 174) that every zero-dimensional bicompact space should admit some proper homeomorphic transformation onto a suitable subspace of it. Actually, we have an ordered zero-dimensional bicompact space without such homeomorphic mappings.

A remark is added concerning the construction of algebras with rather singular automorphism-groups, which may be of some interest from the point of view of abstract ergodic theories [4]). Some consideration of a part of problem Nr 75 of (L) (of whether a certain dual-automorphism-property is typical in Boolean algebras) concludes the paper.

---

[1]) For basic notions of the theory of Boolean algebras (in the sequel, the attribute „Boolean" will often be omitted) see G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXV, Sec. Ed. (1948), quoted as (L).

[2]) The result was communicated by the author at the session of the Polish Mathematical Society in Warsaw on January 26-th 1951.

[3]) Recently M. Katětov (Praha) has given an elegant solution in which he uses the theory of Čech bicompactification. Katětov's result will be published in Coll. Math. (1951) and has priority.

[4]) Cf. P. R. Halmos, Trans. Am. Math. Soc. **55** (1944), p. 1-18.