Un théorème sur les superpositions des fonctions définies dans les ensembles arbitraires.

Par

Jerzy Łoś (Wrocław).

1. E étant un ensemble donné, nous désignons par E^{n*} $(n=1,2,...)$ l'ensemble de toutes les fonctions de n variables $f(x_1,...,x_n)$ définies pour $x_i \in E$ $(i=1,2,...,n)$ et ne prenant que des valeurs qui appartiennent à E et par E^* l'ensemble somme $\sum_{n=1}^{\infty} E^{n*}$.

Le but de cette Note et de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Pour toute suite infinie $f_1, f_2, ...$ de fonctions appartenant à E^*, il existe une fonction $\varphi \in E^{2*}$, telle que toute fonction de la suite considérée est une superposition finie de cette fonction.*

2. On connaît plusieurs théorèmes sur les superpositions de fonctions; les trois suivants serons utilisés dans la démonstration de notre théorème.

2.1. (Th. de M. Sierpiński)[1]. *Soit $\overline{\overline{E}} \geqslant \aleph_0$ et $g_1, g_2, ...$ une suite infinie de fonctions appartenant à E^{1*}. Il existe deux fonctions appartenant à E^{1*}, telles que toute fonction de la suite infinie considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions.*

2.2. (Th. de M. Sierpiński)[2]. *Toute fonction appartenant à E^* est une superposition finie de fonctions appartenant à E^{2*}.*

2.3. (Th. de M. Webb)[3]. *Si $\overline{\overline{E}} < \aleph_0$, il existe alors une fonction de E^{2*} telle que toute fonction appartenant à E^* est une superposition de cette fonction.*

[1]) Fund. Math. **24** (1935), pp. 209-212.

[2]) Fund. Math. **33** (1945), pp. 169-175.

[3]) Amer. Journ. of Math. **58** (1936), pp. 193-194.

3. On voit que pour les ensembles E finis, notre théorème résulte du théorème 2.3. Nous pouvons donc nous borner à considérer uniquement les E infinis. Mais il résulte du théorème 2.2 que nous pouvons nous borner aussi aux suites infinies de fonctions appartenant à E^{2*} (car pour toute suite infinie de fonctions appartenant à E^*, il existe une suite infinie de fonctions appartenant à E^{2*}, telle que chaque fonction de la première suite se réduit par superpositions aux fonctions de la seconde).

Notre théorème se réduit ainsi à la proposition:

3.1. *E étant un ensemble infini, à toute suite $f_1, f_2, ...$ de fonctions appartenant à E^{2*} correspond une fonction $\varphi \in E^{2*}$ telle que toute fonction de la suite considérée est une superposition finie de φ.*

4. Décomposons l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints $E_1, E_2, E_3, ...$, dont chacun a la même puissance que l'ensemble E, et soit $g_n \in E^{1*}$ une fonction qui transforme d'une façon biunivoque E en E_n; nous désignons la fonction inverse de g_n par g_n^{-1}.

La suite $g_1, g_2, ...$ satisfaisant aux conditions du théorème 2.1, il existe deux fonctions $\gamma_1, \gamma_2 \in E^{1*}$, qui satisfont à la thèse de ce théorème. Soit maintenant $\precsim$ une relation qui établit un ordre dans l'ensemble E et $h \in E^{1*}$ une fonction biunivoque assujettie aux conditions:

4.1. *$h(E_n) \subset E_n$ pour tout n naturel,*

4.2. *$x \precsim h(x)$ pour tout $x \in E$.*

5. Définissons maintenant une fonction $\varphi \in E^{2*}$ par quatre conditions suivantes $(x,y \in E)$:

5.1. $\varphi(x,x) = h(x)$,

5.2. $\varphi(x,y) = \gamma_1(x)$, *si* $x,y \in E_n$ *et* $x \precsim y$,

5.3. $\varphi(x,y) = \gamma_2(y)$, *si* $x,y \in E_n$ *et* $y \precsim x$,

5.4. $\varphi(x,y) = f_{|n-k|}[g_n^{-1}(x), g_k^{-1}(y)]$, *si* $x \in E_n$, $y \in E_k$ *et* $n \neq k$.

On voit que:

5.5. *Chaque fonction g_n est une superposition de la fonction φ.*

Nous avons par suite de 4.2, 5.1, 5.2 et 5.3:

$$\varphi[x,\varphi(x,x)]=\gamma_1(x), \quad \varphi[\varphi(x,x),x]=\gamma_2(x).$$

La proposition 5.5 résulte de la définition des fonctions γ_1, γ_2.

6. ***Démonstration de la proposition 3.1.*** Soit f_n une fonction de la suite considérée, n_1 et n_2 deux nombres naturels tels que $|n_1-n_2|=n$. On a d'après 5.4

$$\varphi[g_{n_1}(x), g_{n_2}(y)]=f_{|n_1-n_2|}\{g_{n_1}^{-1}[g_{n_1}(x)], g_{n_2}^{-1}[g_{n_2}(y)]\}=f_n(x,y).$$

La proposition 3.1 et notre théorème sont ainsi démontrés.

A Construction for Models of Consistent Systems [1]).

By

I. L. Novak (Wellesley, Mass., U.S.A.).

This paper describes a method for constructing a model (S'_m) of an extension (S') of a given system (S) within the syntax of (S). § 1 states the conditions which (S) must satisfy to have a model of this type and also explains the relation between (S) and (S'). This is analogous to that existing between Zermelo-Fraenkel set theory and von Neumann-Bernays set theory [2]). In § 2 the formal syntax of (S) is built up. It involves no notion of truth or satisfaction and is essentially equivalent to arithmetic based on the 5 Peano axioms together with the hypothesis that (S) is consistent. It is therefore a denumerable system. Within this syntax it is possible to define a predicate „T" of statements having some of the properties of „is true". This predicate plays an essential role in the construction of the model. The notion of „model" is defined in § 3 and the construction of the model of (S') in the syntax of (S) described in § 4. The existence of this model establishes the consistency of (S') relative to the syntax of (S). Since in syntax there is only a denumerable number of expressions and the range of the variables of (S'_m) is restricted to expressions of a certain type of this syntax, (S'_m) is a denumerable model of (S'). Therefore (S'_m) contains a „subsystem" forming a denumerable model of (S). Such a construction is possible for every system (S) satisfying the assumptions of § 1 and can be carried out entirely within syntax without semantical concepts. It therefore gives another proof of the Skolem-Löwenheim theorem.

---

[1]) Presented to the American Mathematical Society December 30, 1948 and April 30, 1949. The author wishes to express sincere thanks to Profs. L. H. Loomis, A. Mostowski, W. V. Quine and to Dr. J. Myhill for their excellent suggestions and help. This paper is based in part on a thesis submitted for the degree of Ph. D. at Radcliffe College in June 1948, which was written while the author held the M. E. Maltby fellowship (AAUW). Prof. Mostowski has recently improved the results of this paper and shown that every theorem of (S') which can be expressed in (S) is a theorem of (S).

[2]) Cf. Wang [13] where the relations between the two systems are discussed.