Łomnicki Z. et Ulam S. [1] *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I. Variables indépendantes*, Fund. Math. **23** (1934), pp. 237-278.

MacNeille H. [1] *Partially ordered sets*, Trans. Am. Math. Soc. **42** (1937), pp. 416-460.

Marczewski E. [1] *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures (Résultats et problèmes)*, Colloquium Mathematicum **1** (1948), pp. 122-132.

— [2] *Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure*, Fund. Math. **35** (1948), pp. 13-28.

Sikorski R. [1] *On the representation of Boolean algebras as fields of sets*, Fund. Math. **35** (1948), pp. 247-258.

— [2] *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. Math. **36** (1949), pp. 7-22.

— [3] *A theorem on the structure of homomorphisms*, Fund. Math. **36** (1949), pp. 245-247.

— [4] *A theorem on extension of homomorphisms*, Annales Soc. Pol. Math. **21** (1948), pp. 332-335.

— [5] *Independent fields and cartesian products*, Studia Math. **11** (1950), pp. 171-184.

— [6] *On an analogy between measures and homomorphisms*, Annales Soc. Pol. Math. **23** (1950), pp. 1-20.

— [7] *On measures in cartesian products of Boolean algebras*, to appear in Coll. Math. **2** (1950).

Stone M. H. [1] *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), pp. 36-111.

— [2] *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Am. Math. Soc. **41** (1937), pp. 375-481.

Państwowy Instytut Matematyczny.

Sur les suites doubles de fonctions.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Théorème 1. *Soit $f_{m,n}(x)$ $(m=1,2,...;\ n=1,2,...)$ une suite double infinie de fonctions mesurables d'une variable réelle, assujettie à la condition suivante:*

$k_1, k_2, ...$ et $l_1, l_2, ...$ étant deux suites infinies quelconques de nombres naturels, telles que

$$\lim_{n=\infty} k_n = \lim_{n=\infty} l_n = +\infty,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} f_{k_n, l_n}(x) = f(x)$$

pour tout x, abstraction faite d'un ensemble de mesure nulle (dépendant des suites $k_1, k_2, ...$ et $l_1, l_2, ...$).

On a alors

$$\lim_{m,n} f_{m,n}(x) = f(x)$$

pour tout x abstraction faite d'un ensemble de mesure nulle [1]).

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour les fonctions $f_{m,n}(x)$ $(m=1,2,...;\ n=1,2,...)$ définies dans l'intervalle $I=[0 \leqslant x \leqslant 1]$, en posant $f(x)=0$ pour $x \in I$.

Soit $f_{m,n}(x)$ $(m=1,2,...;\ n=1,2,...)$ une suite double de fonctions satisfaisant aux hypothèses du théorème 1 dans l'intervalle I, où $f(x)=0$ pour $x \in I$ et supposons que l'ensemble E de tous les nombres x de I pour lesquels l'égalité $\lim\limits_{m,n} f_{m,n}(x)=0$ est en défaut ne soit pas de mesure nulle. Les fonctions $f_{m,n}(x)$ étant mesurables, l'ensemble E est donc mesurable et de mesure positive.

Pour tout nombre $x \in E$, il existe deux suites infinies de nombres naturels $k_1, k_2, ...$ et $l_1, l_2, ...$, telles que $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \lim\limits_{n=\infty} l_n = +\infty$ sans que $\lim f_{k_n, l_n}(x)=0$. Il en résulte, comme on le voit sans peine,

[1]) Ce théorème résout un problème de M. Sikorski.

qu'il existe un nombre positif a et un ensemble H de mesure positive $2d$ (contenu dans E) tel qu'il existe pour tout nombre x de H deux suites infinies $k_1, k_2, \ldots$ et $l_1, l_2, \ldots$ de nombres naturels pour lesquelles $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \lim\limits_{n=\infty} l_n = +\infty$ et

$$|f_{k_n, l_n}(x)| \geqslant a \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Posons pour m et n naturels

$$H_{m,n} = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[|f_{m,n}(x)| \geqslant a] \tag{1}$$

et pour $p=1,2,\ldots$

$$S_p = \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} H_{m,n}. \tag{2}$$

On a évidemment $H \subset S_p$ pour $p=1,2,\ldots$, donc $m(S_p) \geqslant m(H) \geqslant 2d$ pour $p=1,2,\ldots$ Il en résulte sans peine d'après (2), que, quel que soit le nombre naturel p, il existe un nombre fini de systèmes d'indices $(m_i^{(p)}, n_i^{(p)})$ $(i=1,2,\ldots,s_p)$ tels que $m_i^{(p)} \geqslant p$ et $n_i^{(p)} \geqslant p$ pour $i=1,2,\ldots,s$ et

$$m\Big(\sum_{i=1}^{s_p} H_{m_i^{(p)}, n_i^{(p)}}\Big) > d. \tag{3}$$

Désignons par (k_n, l_n) le n-tième terme de la suite infinie des systèmes

$$\begin{gathered}(m_1^{(1)}, n_1^{(1)}), (m_2^{(2)}, n_2^{(2)}), \ldots, (m_{s_1}^{(1)}, n_{s_1}^{(1)}), (m_1^{(2)}, n_1^{(2)}), \ldots, (m_{s_2}^{(2)}, n_{s_2}^{(2)}), \ldots, \\ (m_1^{(p)}, n_1^{(p)}), (m_2^{(p)}, n_2^{(p)}), \ldots, (m_{s_p}^{(p)}, n_{s_p}^{(p)}), \ldots\end{gathered} \tag{4}$$

Vu que $m_i^{(p)} \geqslant p$ et $n_p^{(i)} \geqslant p$ pour $i=1,2,\ldots,s_p$ $(p=1,2,\ldots)$, on a évidemment $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \lim\limits_{n=\infty} l_n = +\infty$.

Posons

$$A_p = \sum_{i=1}^{s_p} H_{m_i^{(p)}, n_i^{(p)}} \quad \text{pour} \quad p=1,2,\ldots, \quad \text{et} \quad Q = \overline{\lim_k}\, A_k. \tag{5}$$

Or, on démontre dans la théorie de la mesure que $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *étant une suite infinie de sous-ensembles mesurables de l'intervalle I tels que $m(A_k) \geqslant d$ pour $k=1,2,\ldots$, on a*

$$m(\overline{\lim_k}\, A_k) \geqslant d\ ^{2}).$$

On a donc $m(Q) \geqslant d$.

[2]) Voir, par exemple S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, tome VII, Warszawa—Lwów 1937, p. 17, formule (9.3).

Étant donnés un $x \in Q$ et un nombre naturel q, il existe par conséquent un indice $p > q$ tel que $x \in A_p$, donc, d'après (5), un indice $i_p \leqslant s_p$ tel que $x \in H_{m_{i_p}^{(p)}, n_{i_p}^{(p)}}$ et, d'après (1), $|f_{m_{i_p}^{(p)}, n_{i_p}^{(p)}}(x)| \geqslant a$.

Cette inégalité se présente donc pour une infinité de systèmes de la suite (4). Il existe ainsi une infinité de nombres n tels que $|f_{k_n, l_n}(x)| \geqslant a$, sans que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} f_{k_n, l_n}(x) = 0$. Ceci ayant lieu pour tout $x \in Q$, il n'est donc pas vrai que l'égalité $\lim\limits_{n=\infty} f_{k_n, l_n}(x) = 0$ ait lieu pour tous les nombres x de I sauf ceux qui forment un ensemble de mesure nulle, ce qui contredit l'hypothèse du théorème 1.

L'ensemble de tous les nombres x de I pour lesquels l'égalité $\lim\limits_{m,n} f_{m,n}(x) = 0$ est en défaut est donc de mesure nulle et le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Le problème se pose si l'on peut, dans le théorème 1, supprimer le mot „mesurables"? C'est seulement en admettant l'hypothèse du continu que je sais démontrer que la réponse est négative. On a le

Théorème 2. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une suite double de fonctions d'une variable réelle, $f_{m,n}(x)$, telle que:*

1º *quelles que soient les suites infinies $k_1, k_2, \ldots$ et $l_1, l_2, \ldots$ de nombres naturels pour lesquelles $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \lim\limits_{n=\infty} l_n = +\infty$, on a*

$$\lim_{n=\infty} f_{k_n, l_n}(x) = 0 \tag{6}$$

pour tous les x réels abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable,

2º *il n'existe aucun x réel pour lequel on ait $\lim\limits_{m,n} f_{m,n}(x) = 0$.*

Démonstration. Convenons d'écrire $A \precsim B$ pour deux suites infinies de nombres naturels $A = (a_1, a_2, \ldots)$ et $B = (b_1, b_2, \ldots)$ lorsqu'il existe un i naturel tel que $a_k < b_k$ pour $k \geqslant i$.

Lemme. *Étant donnée une suite infinie de suites infinies de nombres naturels $A^i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots)$, il existe une suite infinie croissante de nombres naturels $B = (b_1, b_2, \ldots)$ telle que $A^{(i)} \precsim B$ pour $i = 1, 2, \ldots$*

Démonstration du lemme. Il suffit de poser pour $k = 1, 2, \ldots$

$$b_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_j^{(i)} + 1,$$

pour avoir $b_k > a_k^{(i)}$ pour $k \geqslant i$. Par conséquent $A^{(i)} \precsim B$ pour $i = 1, 2, \ldots$ D'autre part, les nombres $a_k^{(i)}$ étant naturels, on a $b_{k+1} > b_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. L'ensemble S de toutes les suites infinies de nombres naturels étant de puissance $2^{\aleph_0}$, donc de puissance $\aleph_1$ d'après l'hypothèse, il existe une suite transfinie du type Ω:

$$A_1, A_2, \dots, A_\omega, A_{\omega+1}, \dots, A_\xi, \dots \qquad (\xi<\Omega)$$

formée de toutes les suites distinctes de S.

Soit $\alpha<\Omega$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi<\alpha$ est donc au plus dénombrable et, d'après le lemme, il existe une suite infinie croissante de nombres naturels B_α telle que $A_\xi \precsim B_\alpha$ pour $\xi<\alpha$.

La suite transfinie $\{B_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ jouit de la propriété suivante: si A_β non $\precsim B_\alpha$, on a $\alpha\leqslant\beta$. Par conséquent, quelle que soit la suite infinie A de nombres naturels, il n'existe qu'un ensemble au plus dénombrable de nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ tels que A non $\precsim B_\alpha$.

Soit $B_\alpha=(b_1^\alpha, b_2^\alpha, \dots)$.

Il résulte de l'hypothèse $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω:

$$(7) \qquad x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots \qquad (\xi<\Omega)$$

formée de tous les nombres réels distincts.

Posons pour k et l naturels:

$$(8) \qquad f_{k,l}(x_\alpha)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad l=b_k^\alpha \\ 0 & \text{si} \quad l\neq b_k^\alpha. \end{cases}$$

Je vais montrer que la suite double des fonctions $f_{k,l}(x)$ jouit des propriétés 1° et 2°.

En effet, soient $k_1, k_2, \dots$ et $l_1, l_2, \dots$ deux suites infinies de nombres naturels, telles que $\lim\limits_{n=\infty} k_n=\lim\limits_{n=\infty} l_n=+\infty$.

Soit k un nombre naturel donné. Si k n'est pas un terme de la suite infinie $k_1, k_2, \dots$, posons $a_k=k$. S'il existe des termes de la suite infinie $k_1, k_2, \dots$ égaux à k, leur ensemble est fini (vu que $\lim\limits_{n=\infty} k_n=+\infty$): soient $k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_s}$ ces termes. Posons alors

$$a_k=\max(l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_s}).$$

Il en résulte que

$$(9) \qquad a_{k_n}\geqslant l_n \qquad (n=1,2,\dots).$$

Soit maintenant x un nombre réel donné et admettons qu'on n'a pas $\lim\limits_{n=\infty} f_{k_n,l_n}(x)=0$. Il existe donc une suite infinie croissante d'indices $r_1, r_2, \dots$, telle que $f_{k_{r_n}, l_{r_n}}(x)=1$ pour $n=1,2,\dots$ Or, x est un terme de la suite (7); soit $x=x_\alpha$. D'après (9) et (8) on a donc $a_{k_{r_n}}\geqslant l_{r_n}=b_{k_{r_n}}^\alpha$ pour $n=1,2,\dots$ Il en résulte que A non $\precsim B_\alpha$, et que, comme nous avons démontré, l'ensemble des nombres ordinaux α satisfaisant à cette formule est au plus dénombrable. Il existe donc un ensemble au plus dénombrable de nombres réels x pour lesquels on n'a pas $\lim f_{k_n,l_n}(x)=0$. La suite double $f_{k,l}(x)$ jouit donc de la propriété 1°.

Soit $x=x_\alpha$ un nombre réel donné. D'après (8) on a $f_{k,b_k^\alpha}(x)=1$, pour $k=1,2,\dots$, et, la suite infinie $b_1^\alpha, b_2^\alpha, \dots$ étant croissante il en résulte que l'on n'a pas $\lim\limits_{m,n} f_{m,n}(x_\alpha)=0$. La suite double $f_{m,n}(x)$ jouit alors de la propriété 2°.

Le théorème 2 est ainsi démontré.

M. Borsuk a posé le problème suivant: *$f_{m,n}(x)$ étant une suite double de fonctions mesurables satisfaisant à la condition 1° du théorème 2, a-t-on $\lim\limits_{m,n} f_{m,n}(x)=0$ pour tous les x réels sauf pour ceux qui forment un ensemble au plus dénombrable?*

En admettant l'hypothèse du continu, je déduirai du théorème 2 que la réponse à ce problème est négative.

En effet, soit $g_{m,n}(x)$ une suite double de fonctions satisfaisant aux conditions 1° et 2° du théorème 2. Soit P l'ensemble parfait non dense de Cantor. L'ensemble P est, comme on le sait, de mesure nulle et de puissance du continu. Il existe donc une fonction $\varphi(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble P en l'ensemble X de tous les nombres réels.

Posons

$$(10) \qquad f_{m,n}(x)=\begin{cases} g_{m,n}(\varphi(x)) & \text{pour} \quad x\in P, \\ 0 & \text{pour} \quad x\in X-P. \end{cases}$$

Chacune des fonctions $f_{m,n}(x)$ est donc nulle pour tous les x réels sauf pour un ensemble de mesure nulle. Les fonctions $f_{m,n}(x)$ sont donc mesurables (pour m et n naturels).

Soient $k_1, k_2, \dots$ et $l_1, l_2, \dots$ deux suites infinies de nombres naturels, telles que $\lim\limits_{n=\infty} k_n=\lim\limits_{n=\infty} l_n=+\infty$. Comme les fonctions $g_{m,n}(x)$ satisfont à la condition 1° du théorème 2, il existe un ensemble E au plus dénombrable, tel que

(11) $$\lim_{n=\infty} g_{k_n, l_n}(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in X - E.$$

Soit maintenant x un nombre réel pour lequel on n'a pas $\lim_{n=\infty} f_{k_n, l_n}(x) = 0$. D'après (10) on a donc $x \in P$ sans avoir $\lim_{n=\infty} g_{k_n, l_n}(\varphi(x)) = 0$ et, d'après (11), on conclut que $\varphi(x) \in E$. L'ensemble E étant au plus dénombrable et la fonction $\varphi(x)$ étant à valeurs distinctes pour x réels, il en résulte que x appartient à l'ensemble au plus dénombrable $\varphi^{-1}(E)$.

Si l'on avait $\lim_{m,n} f_{m,n}(x) = 0$ pour un nombre $x \in P$, on aurait $\lim_{m,n} g_{m,n}(\varphi(x)) = 0$ d'après (10). Or, c'est impossible, vu que la suite double $g_{m,n}(x)$ satisfait à la condition 2° du théorème 2.

L'égalité $\lim_{m,n} g_{m,n}(x) = 0$ est donc en défaut pour $x \in P$, c'est-à-dire pour les nombres x formants un ensemble de puissance du continu, c. q. f. d.

M. **Borsuk** a posé aussi le problème suivant: *$f_{m,n}(x)$ étant une suite infinie double de fonctions de Baire satisfaisant à la condition 1° du théorème 2, a-t-on $\lim_{m,n} f_{m,n}(x) = 0$ pour tous les x réels, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable?*

La réponse à ce problème est positive. La démonstration est analogue à celle du théorème 1, mais au lieu de profiter des propriétés des fonctions et des ensembles mesurables, il faut s'appuyer sur les trois propositions suivantes:

1. Si $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ..)$, respectivement si $f_{m,n}(x)$ (m et n naturels), sont des fonctions de Baire, l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels on a $\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0$, respectivement celui pour lequel on a $\lim_{m,n} f_{m,n}(x) = 0$, est mesurable B.

2. Tout ensemble mesurable B indénombrable contient un sous-ensemble parfait.

3. Si P est un ensemble linéaire parfait et B_l^k est une suite double d'ensembles mesurables B, telle que $P \subset B_1^k + B_2^k + \dots$ pour $k = 1, 2, \dots$, il existe un sous-ensemble parfait Q de P et une suite infinie de nombres naturels $q_1, q_2, \dots$ tels que $Q \subset B_1^k + B_2^k + \dots + B_{q_k}^k$ pour $k = 1, 2, \dots$

Les propositions 1 et 2 sont bien connues. Quant à la proposition 3, elle peut être démontrée comme il suit.

Soit B_l^k (k et l naturels) une suite double d'ensembles mesurables B et soit P un ensemble parfait tel que $P \subset B_1^k + B_2^k + \dots$ pour $k = 1, 2, \dots$ L'ensemble P étant, en tant que parfait, de puissance du continu, l'un au moins des ensembles $B_1^1, B_2^1, \dots$, soit B_l^1, contient une infinité indénombrable de points de P. L'ensemble $B_l^1 P$ est mesurable B et indénombrable; il contient donc un sous-ensemble parfait.

Or, comme on sait, tout ensemble parfait contient deux sous-ensembles parfaits disjoints de diamètres aussi petits que l'on veut. Il existe donc deux ensembles parfaits Q_0 et Q_1 de diamètres < 1, tels que $Q_0 Q_1 = 0$ et $Q_0 + Q_1 \subset B_l^1$. Pareillement, on démontre l'existence de deux indices l_0 et l_1 et de quatre ensembles parfaits disjoints Q_{00}, Q_{01}, Q_{10} et Q_{11} de diamètres $< 1/2$, tels que $Q_{00} + Q_{01} \subset Q_0 B_{l_0}^2$ et $Q_{10} + Q_{11} \subset Q_1 B_{l_1}^2$.

Généralement, on démontre l'existence, pour tout système fini $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de nombres 0 et 1, des ensembles parfaits $Q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ et des indices $l_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ tels que, pour n donné, les 2^n ensembles $Q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ sont disjoints, de diamètres $< 1/n$ et que

$$Q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 0} + Q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 1} \subset Q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} B_{l_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}}^{n+1}.$$

Soit S_n la somme de tous les 2^n ensembles $Q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$. On voit sans peine que l'ensemble $Q = S_1 S_2 S_3 \dots$ est parfait et contenu dans P, en même temps que, pour tout n donné, dans la somme de tous les ensembles $B_{l_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}}^{n+1}$. Soit $p_1 = l$ et, pour n naturel, soit p_{n+1} le plus grand des nombres $l_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$. On voit sans peine que l'ensemble parfait Q et la suite infinie d'indices $p_1, p_2, \dots$ satisfont à la proposition 3.

Théorème 3. *On peut définir effectivement une suite double de fonctions continues d'une variable réelle $f_{k,l}(x)$, et démontrer* (sans faire appel à l'hypothèse du continu) *qu'elle jouit de deux propriétés suivantes:*

1. Quelles que soient les suites infinies croissantes $k_1, k_2, \dots$ et $l_1, l_2, \dots$ de nombres naturels, on a l'égalité (6) pour tous les x réels sauf pour ceux qui forment un ensemble de mesure nulle.

2. L'ensemble de tous les x réels pour lesquels on n'a pas $\lim_{m,n} f_{m,n}(x) = 0$ est de mesure positive.

Démonstration. Soit $f_{k,l}(x)$ une suite double de fonctions définie comme il suit.

Si $l<k$, posons $f_{k,l}(x)=0$ pour x réels.

Si $l\geqslant k$, posons

$$f_{k,l}(x)=\begin{cases}0 \text{ pour } x\leqslant\dfrac{l-k-1}{2^k} \text{ et } x\geqslant\dfrac{l-k+2}{2^k},\\ 1 \text{ pour } \dfrac{l-k}{2^k}\leqslant x\leqslant\dfrac{l-k+1}{2^k}\end{cases}$$

et prolongeons $f_{k,l}(x)$ linéairement dans les intervalles

$$\frac{l-k-1}{2^k}\leqslant x\leqslant\frac{l-k}{2} \quad\text{et}\quad \frac{l-k+1}{2^k}\leqslant x\leqslant\frac{l-k+2}{2^k}.$$

Soient $k_1,k_2,\ldots$ et $l_1,l_2,\ldots$ deux suites infinies croissantes de nombres naturels. Désignons par $E_{k,l}$ l'intervalle

$$\frac{l-k-1}{2^k}\leqslant x\leqslant\frac{l-k+2}{2^k}$$

et posons $E=\overline{\lim_n} E_{k_n,l_n}$. On a, pour $n=1,2,\ldots$

$$E\subset E_{k_n,l_n}+E_{k_{n+1},l_{n+1}}+\ldots$$

Comme $m(E_{k_n,l_n})=\dfrac{3}{2^{k_n}}$ et la suite $k_1,k_2\ldots$ est croissante, on trouve

$$m(E)\leqslant\frac{3}{2^{k_n}}+\frac{3}{2^{k_{n+1}}}+\ldots\leqslant\frac{3}{2^{k_{n-1}}}\leqslant\frac{3}{2^{n-1}}$$

d'où $m(E)=0$. L'ensemble E est donc de mesure nulle.

Soit x un nombre réel, tel que x non ϵE. Vu la définition de l'ensemble E, on a x non $\epsilon E_{k_n,l_n}$ pour n suffisamment grand, soit pour $n\geqslant q$. D'après la définition de la fonction $f_{k,l}(x)$, on a donc $f_{k_n,l_n}(x)=0$ pour $n\geqslant q$, d'où $\lim_{n=\infty} f_{k_n,l_n}(x)=0$. On a par conséquent la formule (6) pour x non ϵE, donc presque partout. La suite double $f_{k,l}(x)$ jouit ainsi de la propriété 1.

Soit maintenant $x\geqslant 0$. Il existe évidemment pour tout k naturel un nombre naturel $l_k\geqslant k$ tel que

$$\frac{l_k-k}{2^k}\leqslant x\leqslant\frac{l_k-k+1}{2^k}.$$

D'après (12), nous avons donc $f_{k,l_k}(x)=1$ pour $k=1,2,\ldots;$ vu que $l_k\geqslant k$, il en résulte que l'on n'a pas $\lim_{m,n} f_{m,n}(x)=0$. La suite double $f_{k,l}(x)$ jouit donc de la propriété 2.

Le théorème 3 se trouve ainsi démontré.

An Algebraic Characterization of Quantifiers.

By

Leon Henkin (Los Angeles, California, U. S. A.).

Introduction. In this paper[1]) we shall be concerned with the relation between certain formal systems, in the sense of modern logic, and certain algebraic structures which serve as „models" for these systems. Perhaps the most elementary and fundamental instance of what we have in mind is the relationship between the classical (two-valued) propositional calculus and the abstract structures known as Boolean algebras, which was explored very early in the literature. More recently a similar relationship has been shown[2]) by Tarski and McKinsey to hold between intuitionistic (propositional) logic and Brouwerian lattices; and also between certain modal logics and closure algebras.

Each of the propositional calculi mentioned above has been extended to a first order functional calculus embodying a theory of quantification for individual variables. The classical functional calculus is widely known; the extension for the intuitionistic logic has been carried out by Heyting[3]); while for modal logics this has recently been done by Barcan[4]), and independently by Carnap[5]).

---

[1]) This work was begun while the author was a Frank B. Jewett Fellow at Princeton. The author wishes to express his indebtedness to Professor Mostowski not only for suggesting the problem which led to this work, but also for the suggestion that the results be expressed with the present degree of generality.

[2]) J. C. C. McKinsey and Alfred Tarski, *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, The Journal of Symbolic Logic, vol. **13** (1948), pp. 1-15.

[3]) A. Heyting, *On weakened quantification*, The Journal of Symbolic Logic, vol. **11** (1946), pp. 119-121.

[4]) Ruth C. Barcan, *A functional calculus of first order based on strict implication*, The Journal of Symbolic Logic, vol. **11** (1946), pp. 1-16.

[5]) Rudolf Carnap, *Modalities and quantification*, The Journal of Symbolic Logic, vol. **11** (1946), pp. 33-64.