The condition is necessary. For, suppose

$$\mathfrak{X}-E=A_1+\ldots+A_n, \quad A_i\neq 0, \quad A_i\cdot\bar{A}_j=0 \quad \text{for} \quad i\neq j.$$

Let $G_1,\ldots,G_n$ be a system of open sets such that [6]):

$$A_i\subset G_i, \quad G_i\cdot G_j=0 \quad \text{for} \quad i\neq j.$$

Put $F=\mathfrak{X}-(G_1+\ldots+G_n)$. Hence $F\subset E$.

Let $F\subset H\subset E$. Thus $\mathfrak{X}-E\subset\mathfrak{X}-H\subset\mathfrak{X}-F$ and consequently

$$\mathfrak{X}-H=(G_1-H)+\ldots+(G_n-H) \quad \text{and} \quad 0\neq A_i\subset G_i-H.$$

The condition is sufficient. For, suppose that $\mathfrak{X}-E$ is not decomposable into n separated non void sets. Let F be an arbitrary closed subset of E. Owing to the local connectedness of $\mathfrak{X}$, the components of $\mathfrak{X}-F$ are open.

Let $C_1,\ldots,C_k$ be the system of all components of $\mathfrak{X}-F$ such that $C_i-E\neq 0$. Hence $k<n$. For otherwise, as $\mathfrak{X}-E\subset\mathfrak{X}-F$, we would have

$$\mathfrak{X}-E=(C_1-E)+\ldots+(C_{n-1}-E)+[\mathfrak{X}-F-(C_1+\ldots+C_{n-1})-E],$$

a decomposition of $\mathfrak{X}-E$ into n non void separated sets.

Put $H=\mathfrak{X}-(C_1+\ldots+C_k)$. Thus

$$F\subset H=\bar{H}\subset E \quad \text{and} \quad \mathfrak{X}-H=C_1+\ldots+C_k.$$

The sets $C_1,\ldots,C_k$ being connected, $\mathfrak{X}-H$ is not decomposable into n separated non void subsets.

Thus, theorem (iii) is established. Let us now prove theorem (ii).

Let E be a subset of a locally connected continuum $\mathfrak{X}$ and let n be the number of components of $\mathfrak{X}-E$ $(n<\infty)$.

Let f be a homeomorphism of E onto $E^*=f(E)\subset\mathfrak{X}$. Obviously it will suffice to show that the number of components of $\mathfrak{X}-E^*$ is $\geqslant n$.

By theorem (iii) there exists a closed set $F\subset E$ such that for each closed set H satisfying the condition $F\subset H\subset E$ the set $\mathfrak{X}-H$ contains $\geqslant n$ components.

Put $F^*=f(F)$. Owing to the compactness of the space $\mathfrak{X}$, the set F^* is a closed subset of E^*. Let K be a closed set such that $F^*\subset K\subset E^*$. Put $H=f^{-1}(K)$. As $F\subset H=\bar{H}\subset E$, the number of components of $\mathfrak{X}-H$ is $\geqslant n$, and so is the number of components of $\mathfrak{X}-K$ (for $\mathfrak{X}$ satisfies by assumption condition (i)).

It follows by (iii) that the number of components of $\mathfrak{X}-E^*$ is $\geqslant n$.

[6]) See my *Topologie I* (1948), p. 122.

Sur les types d'ordre des ensembles linéaires.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On peut généraliser, d'après M. Fraïssé [1]), aux types d'ordre la relation $<$ connue pour les nombres ordinaux, en convenant qu'on a, pour deux types d'ordre α et β, l'inégalité $\alpha<\beta$ dans ce cas et seulement dans ce cas si A et B étant deux ensembles ordonnés respectivement de types α et β, l'ensemble A est semblable à un sous-ensemble de B, mais l'ensemble B n'est semblable à aucun sous-ensemble de A.

On démontre sans peine que les types d'ordre deviennent ainsi partiellement ordonnés par la relation $<$.

Nous dirons que deux types d'ordre α et β sont *incomparables* et nous écrirons $\alpha\|\beta$, si, A et B étant deux ensembles ordonnés respectivement de types α et β, aucun de ces ensembles n'est semblable à un sous-ensemble de l'autre.

Théorème 1. *E étant un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe toujours un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ dont le type d'ordre est plus petit que celui de l'ensemble E.* (Nous supposons naturellement les ensembles linéaires ordonnés d'après la grandeur des abcisses des points qui les constituent) [2]).

La démonstration de notre théorème sera basée sur le

Lemme 1. *E étant un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble linéaire $H\subset E$ de puissance $2^{\aleph_0}$ tel que f étant une fonction croissante quelconque définie dans E, on a $f(E)-H\neq 0$.*

[1]) Comptes Rendus Acad. Sc. Paris **226**, p. 1330 (séance du 26 avril 1948).

[2]) Les théorèmes de 1 à 7 et le théorème 9 ont été énoncés sans démonstration dans ma Note du 13 mai 1950 parue dans les Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, ser. VIII, vol. VIII, p. 427-428.

Démonstration du lemme 1. Soit (ici et partout plus loin) φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$ et soit

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels. L'ensemble de toutes les fonctions réelles croissantes définies pour $x \in E$ étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie $\{f_\xi\}_{\xi<\varphi}$ du type φ formée de toutes ces fonctions.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie deux suites transfinies du type φ de nombres réels $\{p_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{q_\xi\}_{\xi<\varphi}$ comme il suit.

Soit p_1 le premier terme de la suite transfinie (1) qui appartient à E. Comme $f_1(E)$ est un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ (vu que la fonction f_1, en tant que croissante pour $x \in E$ est à valeurs distinctes pour $x \in E$, et vu que $\overline{\overline{E}}=2^{\aleph_0}$), il existe des termes de la suite (1) qui sont des éléments de $f_1(E)$ distincts de p_1; soit q_1 le premier d'entre eux.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné $<\varphi$ et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments p_ξ et q_ξ pour $\xi<\alpha$. Comme $\alpha<\varphi$ (et comme φ désigne le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$), l'ensemble $S_\alpha=\sum\limits_{\xi<\alpha}\{p_\xi\}+\sum\limits_{\xi<\alpha}\{q_\xi\}$ est de puissance $<2^{\aleph_0}$, et, comme $\overline{\overline{E}}=2^{\aleph_0}$, il existe des termes de la suite (1) qui appartiennent à $E-S_\alpha$; nous définirons p_α comme le premier d'entre eux. D'autre part, comme $\overline{\overline{f_\alpha(E)}}=2^{\aleph_0}$, il existe des éléments de $f_\alpha(E)$ étrangers à l'ensemble $S_\alpha+\{p_\alpha\}$: nous définirons q_α comme le premier d'entre eux.

Les suites transfinies $\{p_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{q_\xi\}_{\xi<\varphi}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie et on a évidemment

$$(2) \qquad p_\xi \neq p_\eta \quad \text{pour} \quad \xi<\eta<\varphi, \quad p_\xi \neq q_\eta \quad \text{pour} \quad \xi<\varphi,\ \eta<\varphi,$$

et

$$(3) \qquad p_\xi \in E \quad \text{et} \quad q_\xi \in f_\xi(E) \qquad \text{pour} \quad \xi<\varphi.$$

Posons $H=\sum\limits_{\xi<\varphi}\{p_\xi\}$: ce sera évidemment un sous-ensemble de E de puissance $2^{\aleph_0}$. D'après (2) on a, pour $\alpha<\varphi$, $q_\alpha \bar{\in} H$, donc, d'après (3) $q_\alpha \in f_\alpha(E)-H$, d'où $f_\alpha(E)-H\neq 0$ pour $\alpha<\varphi$.

La suite transfinie $\{f_\xi\}_{\xi<\varphi}$ étant formée de toutes les fonctions croissantes définies dans E, notre lemme se trouve démontré.

Démonstration du théorème 1. Soit E un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ et soit H le sous-ensemble de E satisfaisant à notre lemme. Si l'ensemble E était semblable à un sous-ensemble de H, il existerait une fonction croissante f définie dans E et telle que $f(E)\subset H$, ce qui est impossible, puisque, l'ensemble H satisfaisant à notre lemme, on a $f(E)-H\neq 0$. L'ensemble E n'est donc semblable à aucun sous-ensemble de H. Vu la définition de l'inégalité pour les types d'ordre nous concluons donc que le type d'ordre de l'ensemble H est plus petit que celui de E. Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Notre démonstration du théorème 1 utilise le théorème de Zermelo sur le bon ordre et n'est pas effective. Or, dans l'état actuel de la science on ne sait nommer aucun ensemble linéaire indénombrable dont le type d'ordre serait plus petit que celui de l'ensemble de tous les nombres réels. En effet, un tel ensemble ne contiendrait aucun sous-ensemble parfait, puisqu'on démontre sans peine que tout ensemble linéaire parfait contient un sous-ensemble semblable à l'ensemble de tous les nombres réels.

On ne connait donc aucun type d'ordre indénombrable plus petit que λ, quoiqu'il résulte tout de suite du théorème 1 qu'*il existe une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de types d'ordre de puissance du continu tels que*

$$\lambda>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\ldots$$

Il est cependant à remarquer que, d'après les résultats de M. M. Gödel et Kuratowski, on peut définir un ensemble linéaire tel que l'hypothèse qu'il est indénombrable et du type $<\lambda$ est non contradictoire avec les axiomes habituellement admis de la théorie des ensembles (si ces axiomes ne sont pas contradictoires) [3].

Voici encore un corollaire immédiat du théorème 1:

Corollaire. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe pour tout ensemble linéaire indénombrable E un ensemble linéaire indénombrable dont le type d'ordre est plus petit que celui de l'ensemble E.*

Je ne sais pas démontrer ce corollaire sans admettre que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Il est à remarquer que le corollaire peut être en défaut pour les ensembles ordonnés non linéaires. Par exemple un ensemble ordonné du type Ω ne contient aucun sous-ensemble indénombrable

[3]) Voir C. Kuratowski, Fund. Math. **35**, p. 139.

qui ne soit pas du type Ω. Pareillement un ensemble ordonné du type φ ne contient aucun sous-ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ qui ne soit pas du type φ.

Soit F la famille de toutes les fonctions croissantes d'une variable réelle distinctes de la fonction $f(x)=x$. La famille F étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie de type $\varphi, \{f_\xi\}_{\xi<\varphi}$, contenant chaque fonction de la famille F deux fois: pour un ξ impair et pour un ξ pair [4]).

Comme $f_1 \in F$, on n'a pas identiquement $f_1(x)=x$ et il existe un nombre réel x_1, tel que $f_1(x_1)=y_1 \neq x_1$.

Soit α un nombre ordinal, $1<\alpha<\varphi$. La fonction $f_\alpha(x)$ de la famille F étant croissante, l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $f_\alpha(x)=x$, ne peut pas être partout dense (sur la droite), puisqu'alors on aurait identiquement $f_\alpha(x)=x$, contrairement à $f_\alpha \in F$. Il existe donc un intervalle (a_α, b_α), où $a_\alpha<b_\alpha$, tel que $f_\alpha(x) \neq x$ pour $a_\alpha<x<b_\alpha$. L'ensemble de nombres réels x, tels que $f_\alpha(x) \neq x$ est donc de puissance $2^{\aleph_0}$.

Supposons maintenant que nous avons défini tous les nombres x_ξ et y_ξ, où $\xi<\alpha$. Vu que $\alpha<\varphi$, d'où $\overline{\overline{\alpha}}<2^{\aleph_0}$, l'ensemble $S_\alpha=\sum_{\xi<\alpha}(\{x_\xi\}+\{y_\xi\})$ est de puissance $<2^{\aleph_0}$, de même que l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $f_\alpha(x) \in S_\alpha$ (puisque f_α est une fonction croissante). L'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $f_\alpha(x) \neq x$ étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe donc un nombre réel x_α, tel que $x_\alpha \bar{\in} S_\alpha$, $f_\alpha(x_\alpha) \bar{\in} S_\alpha$ et que $y_\alpha=f_\alpha(x_\alpha) \neq x_\alpha$.

Les suites transfinies $\{x_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ et $\{y_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie et les éléments de ces suites sont tous distincts.

Soit Q un intervalle quelconque; il existe évidemment une fonction croissante $f(x)$ d'une variable réelle, telle que $f(x)=x$ pour $x \bar{\in} Q$ et qu'on a $f(x) \neq x$ pour $x \in Q$. Comme $f \in F$, il existe un nombre ordinal $\alpha<\varphi$, tel que $f=f_{2\alpha}$ et comme on a $f_{2\alpha}(x_{2\alpha}) \neq x_{2\alpha}$, on trouve $x_{2\alpha} \in Q$. L'ensemble $H=\sum_{\xi<\varphi}\{x_{2\xi}\}$ est donc partout dense (sur la droite).

[4]) L'idée de ce raisonnement m'a été suggérée par la démonstration de M. M. Ben Dushnik et E. W. Miller d'existence d'un ensemble linéaire qui n'est semblable à aucun de ses vrais sous-ensembles, Bull. Amer. Math. Soc. **46** 1940), p. 325, Th. 3.

Posons $Z=\sum_{\xi<\varphi}\{x_{2\xi+1}\}$; ce sera un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ et on a $ZH=0$. À tout sous-ensemble T de l'ensemble Z faisons maintenant correspondre l'ensemble $E_T=T+H$.

Soient A et B deux sous-ensembles de Z tels que $A-B \neq 0$ et supposons que l'ensemble E_A ordonné d'après la grandeur des abscisses de ses points est semblable (au sens de l'ordre) à un sous-ensemble de E_B. Il existe donc une fonction $g(x)$ définie dans E_A et croissante dans E_A, telle que $g(E_A) \subset E_B$. L'ensemble H, donc aussi l'ensemble E_A, étant partout dense (sur la droite), la fonction $g(x)$ croissante dans E_A peut être étendue à une fonction croissante $f(x)$ d'une variable réelle autre que la fonction x, puisqu'autrement on aurait $g(x)=f(x)=x$ pour $x \in E_A$, d'où $g(E_A)=E_A$, tandis que $g(E_A) \subset E_B$ et $E_A-E_B=A-B \neq 0$.

Ainsi $f(x)$ est une fonction de la famille F et il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$, tel que $f(x)=f_{2\mu}(x)$ pour x réels. Or, on a $x_{2\mu} \in H$, donc $x_{2\mu} \in E_A$ et (vu que $y_\xi \bar{\in} H+Z$) $f_{2\mu}(x_{2\mu})=y_{2\mu} \bar{\in} E_B$, ce qui prouve qu'il ne peut pas être $f_{2\mu}(E_A) \subset E_B$, contrairement à $g(E_A) \subset E_B$ (puisque $f_{2\mu}(x)=f(x)=g(x)$ pour $x \in E_A$).

Nous avons ainsi démontré que, si A et B sont deux sous-ensembles de Z tels que $A-B \neq 0$, l'ensemble E_A n'est semblable à aucun sous-ensemble de E_B.

Posons maintenant, pour $\alpha<\varphi$, $Z_\alpha=\sum_{\alpha\leqslant\xi<\varphi}\{x_{2\xi+1}\}$. Nous aurons $Z_\alpha \supset Z_\beta$ et $x_{2\alpha+1} \in Z_\alpha - Z_\beta$ pour $\alpha<\beta<\varphi$. Donc, si $\alpha<\beta<\varphi$, l'ensemble E_{Z_α} n'est semblable à aucun sous-ensemble de son sous-ensemble E_{Z_β}. Il en résulte que $\overline{E}_{Z_\alpha}>\overline{E}_{Z_\beta}$. Nous avons ainsi établi le

Théorème 2. *Il existe une suite transfinie de puissance du continu de types ordinaux décroissants d'ensembles linéaires de puissance du continu.*

Posons, d'autre part, pour $\alpha<\varphi$, $T_\alpha=\sum_{\xi<\alpha}\{x_{2\xi+1}\}$. Nous aurons $T_\alpha \subset T_\xi$ et $x_{2\alpha+1} \in T_\beta - T_\alpha$ pour $\alpha<\beta<\varphi$, donc $\overline{E}_{T_\alpha}<\overline{E}_{T_\beta}$. On a ainsi le

Théorème 3. *Il existe une suite transfinie de puissance du continu de types ordinaux croissants d'ensembles linéaires de puissance du continu.*

L'ensemble Z étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe, comme on sait, une famille Φ formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles de Z, tels que pour

$A \epsilon \Phi$, $B \epsilon \Phi$, $A \neq B$ on a $A-B \neq 0$ et $B-A \neq 0$. On a ainsi $\overline{E}_A \| \overline{E}_B$ (vu qu'aucun des ensembles E_A et E_B n'est pas semblable à un sous-ensemble de l'autre). Les types $\overline{E}_A$ et $\overline{E}_B$ sont donc incomparables pour $A \epsilon \Phi$, $B \epsilon \Phi$, $A \neq B$. On a ainsi le

Théorème 4. *Il existe une famille formée de $2^{\aleph_0}$ ensembles linéaires de puissance du continu dont les types d'ordre sont deux à deux incomparables.*

Posons encore, pour $\alpha < \varphi$, $Q_\alpha = \{x_{2\alpha+1}\}$. Les ensembles E_{Q_α}, où $\alpha < \varphi$, ont des types d'ordre incomparables et ne diffèrent deux à deux que par deux points. On a ainsi le

Théorème 5. *Il existe une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires de puissance du continu ne différant deux à deux que pa deux points et dont les types d'ordre sont incomparables.*

Posons $H_1 = H + \{x_1\}$. Nous aurons, comme nous savons, $\overline{H} < \overline{H}_1$ (puisque $H = E_{T_0}$ et $H_1 = E_{T_1}$). Supposons maintenant qu'il existe un type d'ordre τ tel que $\overline{H} < \tau < \overline{H}_1$. Il existerait donc un ensemble $M \subset H_1$, tel que $\overline{M} = \tau$, donc $\overline{H} < \overline{M}$, et il existerait une fonction $g(x)$ définie pour $x \epsilon H$ et croissante dans H, telle que $g(H) \subset M$, et on pourrait prolonger la fonction $g(x)$ à une fonction croissante $f(x)$ d'une variable réelle. S'il était $f(x) = x$ pour x réels, on aurait $g(x) = x$ pour $x \epsilon H$, donc $g(H) = H$, ce qui donne $H \subset M \subset H_1 = H + \{x_1\}$. Or, d'après $\overline{H} < \overline{M} < \overline{H}_1$, on a $H \neq M \neq H_1$, ce qui est impossible, puisqu'il n'existe aucun ensemble autre que H et $H_1 = H + \{x_1\}$, contenant le premier de ces ensembles et contenu dans le second. La fonction $f(x)$ est donc distincte de la fonction x et on a $f \epsilon F$. Il existe donc un nombre ordinal $\alpha < \varphi$, tel que $f = f_{2\alpha}$. Or, on a $x_{2\alpha} \epsilon H$, donc $g(x_{2\alpha}) = f(x_{2\alpha}) = y_{2\alpha} \bar{\epsilon} H_1$, et à plus forte raison $g(x_{2\alpha}) \bar{\epsilon} M$, contrairement à $g(H) \subset M$.

Nous avons ainsi démontré qu'il n'existe aucun type ordinal τ tel que $\overline{H} < \tau < \overline{H}_1$. On a ainsi le

Théorème 6. *Il existe des ensembles linéaires H et H_1 de puissance du continu tels que $\overline{H} < \overline{H}_1$ et qu'il n'existe aucun type ordinal intermédiaire entre $\overline{H}$ et $\overline{H}_1$.*

Il existe d'ailleurs, pour le type $\psi = \overline{H}$, $2^{\aleph_0}$ types ordinaux deux à deux incomparables et tels que ϑ étant un quelconque d'entre eux, on a $\psi < \vartheta$ et il n'existe aucun type intermédiaire entre ψ et ϑ. Ce sont, comme on le voit sans peine, les types des ensembles $H + \{x_{2\alpha+1}\}$, où $\alpha < \varphi$.

Je donnerai maintenant une autre démonstration du théorème 4 basée sur une idée différente. Dans ce but je démontrerai d'abord le

Lemme 2. *E étant un ensemble contenu dans l'intervalle $J = [0 < x < 1]$ et $f(x)$ une fonction croissante définie dans E, où $0 < f(x) < 1$ pour $x \epsilon E$, il existe une fonction de Baire $g(x)$ à valeurs distinctes définie dans J et telle que $g(x) = f(x)$ pour $x \epsilon E$.*

Démonstration du lemme 2. Posons $g(x) = f(x)$ pour $x \epsilon E$. Si $x \epsilon J - E$ et si x est un point d'accumulation de l'ensemble E de deux côtés, soit $g(x)$ la borne supérieure des nombres $f(t)$ pour $t \epsilon E$, $t < x$. Dans tous les autres cas posons $g(x) = x + 1$.

Soit E_1 l'ensemble que l'on obtient en adjoignant à l'ensemble E tous les points qui sont points d'accumulation de deux côtés de l'ensemble E. Pour démontrer que la fonction $g(x)$ est à valeurs distinctes dans J, il suffira évidemment de démontrer qu'elle est croissante dans E_1. La fonction $g(x)$ est, comme on le voit sans peine, croissante dans E_1 en tout point de E. Il reste à démontrer qu'elle est croissante dans E_1 en chaque point de l'ensemble $E_1 - E$. Soit donc $x_0 \epsilon E_1 - E$, $x \epsilon E_1$, $x < x_0$. On a donc $x_0 \epsilon E_1$ et il existe des points x_1 et x_2 de E, tels que $x < x_1 < x_2 < x_0$, et on a $f(x_1) < f(x_2)$. Or, vu la définition de la fonction g et vu que d'après $x < x_1$, on a $f(t) < f(x_1)$ pour $t < x$, $t \epsilon E$, on trouve $g(x) \leqslant f(x_1)$ et, comme $x_2 < x_0$, on a $f(x_2) \leqslant g(x_0)$. On a ainsi $g(x) < g(x_0)$ pour $x < x_0$. Si $x_0 < x$, $x \epsilon E_1$, il existe des points x_1 et x_2 de E tels que $x_0 < x_1 < x_2 < x$ et on trouve pareillement $g(x_0) \leqslant f(x_1) < f(x_2) \leqslant g(x)$, d'où $g(x_0) < g(x)$. La fonction g est donc croissante dans E_1 en tout point x_0 de $E_1 - E$, c. q. f. d.

L'ensemble $\overline{E} - E_1$ est évidemment l'ensemble de tous les points de J qui sont points d'accumulation de l'ensemble E d'un seul côté et qui forment, comme on sait, un ensemble au plus dénombrable, donc un F_σ. Comme $E_1 \subset \overline{E}$ et l'ensemble $\overline{E}$ est fermé, E_1 est donc un ensemble G_δ. La fonction $g(x)$ est donc croissante dans l'ensemble E_1 qui est un G_δ et croissante dans l'ensemble $J - E_1$ qui est un F_σ; elle est donc une fonction de Baire dans J.

Le lemme 2 se trouve ainsi démontré.

Démonstration du théorème 4. Dans le volume 34 des *Fundamenta Mathematicae*, p. 30, j'ai démontré la proposition P suivante:

P. Si M est un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ et F une famille de puissance $\mathfrak{m}$ de fonctions définies dans M et prenant (pour les éléments de M) chaque valeur de M au plus une fois (pouvant d'ailleurs prendre, pour les éléments de M, des valeurs étrangères à M), il existe une famille Φ formée de $2^{\mathfrak{m}}$ sous-ensembles distincts de M, telle qu'on a

(4) $g(E)-H\neq 0$ pour $E\in\Phi,\ H\in\Phi,\ E\neq H,\ g\in F$ [5].

Or, il résulte tout de suite de la démonstration de la proposition P donnée l. c. que les ensembles de la famille Φ peuvent être supposés de puissance $\mathfrak{m}$.

Soit maintenant $M=J$, donc $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$ et soit F la famille de toutes les fonctions de Baire à valeurs distinctes définies dans J; comme on le sait, la famille F est de puissance $2^{\aleph_0}$. Il existe donc une famille Φ formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles de J et satisfaisant à la proposition P.

Nous prouverons que E et H étant deux ensembles distincts de la famille Φ, l'ensemble E n'est semblable à aucun sous-ensemble de H (les ensembles E et H étant supposés ordonnés d'après la grandeur des abscisses des points qui les constituent).

Admettons, en effet, que l'ensemble E est semblable à un sous-ensemble H_1 de H. Il existe alors une fonction $f(x)$ croissante dans E et qui transforme E en H_1; d'après le lemme 2 il existe donc une fonction $g(x)$ de la famille F, telle que $g(x)=f(x)$ pour $x\in E$, donc $g(E)=f(E)=H_1\subset H$, contrairement à (4).

Nous avons ainsi démontré que deux ensembles distincts de la famille Φ ont toujours des types d'ordre incomparables. La famille de tous les types d'ordre des ensembles de la famille Φ vérifie donc le théorème 4, qui se trouve ainsi démontré.

Théorème 7. *Quel que soit le type ordinal $\alpha<\lambda$, il existe un type ordinal β tel que $\alpha<\beta<\lambda$.*

Pour démontrer ce théorème je prouverai d'abord trois lemmes.

Un ensemble linéaire est dit totalement imparfait, s'il ne contient aucun sous-ensemble parfait non vide.

Lemme 3. *Une somme d'un ensemble totalement imparfait et d'un ensemble de puissance $<2^{\aleph_0}$ est un ensemble totalement imparfait.*

[5] Cf. aussi le théorème de C. Kuratowski, Fund. Math. **34**, p. 36.

Démonstration du lemme 3. Soit E un ensemble linéaire totalement imparfait et CE son complémentaire (par rapport à la droite) et soit P un ensemble linéaire parfait non vide. L'ensemble P contient, comme on sait, une somme S de $2^{\aleph_0}$ ensembles parfaits non vides disjoints. P_1 étant un terme de la somme S, l'ensemble P_1 ne peut pas être contenu dans l'ensemble (totalement imparfait) E on a donc $P_1\cdot CE\neq 0$. Ceci étant vrai pour tout terme P_1 de la somme S, l'ensemble CE a $2^{\aleph_0}$ points communs avec $S\subset P$, donc avec P.

Ainsi tout ensemble H complémentaire d'un ensemble linéaire totalement imparfait a $2^{\aleph_0}$ points communs avec tout ensemble linéaire parfait non vide. Cette propriété subsiste évidemment si l'on écarte de H un ensemble T de puissance $<2^{\aleph_0}$. Donc, si E est totalement imparfait, l'ensemble $E+T$ est aussi totalement imparfait, et le lemme 3 est démontré.

Un ensemble linéaire E contenant un sous-ensemble parfait non vide contient évidemment aussi un sous-ensemble parfait non vide et borné (donc compact). Un ensemble homéomorphe à un ensemble parfait et compact étant parfait, on en déduit tout de suite qu'une image homéomorphe d'un ensemble linéaire E contenant un sous-ensemble parfait non vide contient un sous-ensemble parfait non vide. Il en résulte qu'un ensemble homéomorphe à un ensemble linéaire totalement imparfait est totalement imparfait.

Lemme 4. *Un ensemble linéaire semblable (au sens de l'ordre) à un ensemble linéaire totalement imparfait est totalement imparfait.*

Démonstration du lemme 4. Si l'ensemble linéaire E est totalement imparfait, on a $\overline{E}<\lambda$, et, si H est un ensemble linéaire semblable (au sens de l'ordre) à E, on a $\overline{E}=\overline{H}$, donc $\overline{H}<\lambda$ et il en résulte que l'ensemble H est totalement imparfait, puisque, comme on le voit sans peine, chaque ensemble contenant un sous-ensemble parfait non vide, contient un sous-ensemble du type λ.

Lemme 5. *Une fonction non décroissante d'une variable réelle transforme un ensemble linéaire totalement imparfait en un ensemble totalement imparfait.*

Démonstration du lemme 5. Soit E un ensemble linéaire totalement imparfait et soit f une fonction non décroissante d'une variable réelle. A chaque élément y de $f(E)$ correspond au moins un élément x de E, tel que $f(x)=y$; choisissons pour tout $y\in f(E)$ un tel élément $x=x_y$ et soit H l'ensemble de tous les éléments x_y, où $y \in f(E)$. La fonction f est évidemment croissante dans l'ensemble H et on a $f(H)=f(E)$. Or, on a $H \subset E$ et l'ensemble E étant totalement imparfait, il en est de même de l'ensemble H. D'après le lemme 4 l'ensemble $f(H)$ est donc totalement imparfait (en tant que semblable à E). Comme $f(E)=f(H)$, le lemme 5 se trouve démontré.

Démonstration du théorème 7. Soit $\{f_\xi\}_{\xi<\varphi}$ une suite transfinie du type φ formée de toutes les fonctions non décroissantes réelles définies pour $0<x<1$.

Soit $\{P_\xi\}_{\xi<\varphi}$ une suite transfinie du type φ formée de tous les ensembles linéaires parfaits non vides. Soit E un ensemble tel que $\overline{E}<\lambda$ et soit E_1 un ensemble semblable à E situé à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$. D'après le lemme 4 l'ensemble E_1 est totalement imparfait.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie deux suites transfinies $\{p_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{q_\xi\}_{\xi<\varphi}$ comme il suit.

L'ensemble E_1 étant totalement imparfait, il en est de même pour l'ensemble $f_1(E_1)$, d'après le lemme 5. Il existe donc un point p_1 de l'intervalle $(1,2)$ qui n'appartient pas à $f_1(E_1)$, et, comme $f_1(E_1)+\{p_1\}$ est, d'après le lemme 1, un ensemble totalement imparfait, il existe un point q_1 de P_1 n'appartenant pas à l'ensemble $f_1(E_1)+\{p_1\}$.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné >1 et supposons que nous avons déjà défini tous les points p_ξ et q_ξ, où $\xi<\alpha$. L'ensemble $T_\alpha=f_\alpha(E_1)+\sum_{\xi<\alpha}[\{p_\xi\}+\{q_\xi\}]$ est, d'après les lemmes 3 et 1, totalement imparfait et il existe un point p_2 de l'intervalle $(1,2)$, tel que $p_\alpha \,\overline{\in}\, T_\alpha$ et un point q_α de P_α, tel que $q_\alpha \,\overline{\in}\, T_\alpha+\{p_\alpha\}$.

Posons $H=E_1+\sum_{\xi<\varphi}\{p_\xi\}$. Je dis que $\overline{E}_1<\overline{H}<\lambda$. Comme $H\supset E_1$, l'ensemble H contient un sous-ensemble semblable à E_1. Si l'ensemble E_1 contenait un sous-ensemble H_1 semblable à H, il existerait une fonction f définie et croissante dans H_1, telle que $f(H_1)=H$ et, comme $H_1 \subset E_1$ et E_1 est situé à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$, il existerait une fonction f_α non décroissante pour $0<x<1$ et telle que $f(x)=f_\alpha(x)$ pour $x \in H_1$. On aurait donc $f_\alpha(E_1)\supset f_\alpha(H_1)=f(H_1)=H$ et il résulterait de la définition de l'ensemble H que $p_\alpha = f_\alpha(E_1)$, contrairement à la définition du point p_α.

L'ensemble $E_1 \subset H$ ne contient donc aucun sous-ensemble semblable à H. On a par conséquent $\overline{E}_1<\overline{H}$, donc aussi $\overline{E}<\overline{H}$.

Or, comme $q_\alpha \,\overline{\in}\, H$ et $q_\alpha \in P_\alpha$ pour $\alpha<\varphi$, l'ensemble H ne contient aucun sous-ensemble parfait non vide. On a ainsi $\overline{E}<\overline{H}<\lambda$ et le théorème 7 est démontré.

Théorème 8. *Si α_i $(i=1,2,\ldots)$ est une suite infinie de types ordinaux $<\lambda$, on a $\alpha_1+\alpha_2+\ldots<\lambda$.*

Démonstration. Soit, pour $i=1,2,\ldots$, E_i un ensemble de type α_i situé à l'intérieur de l'intervalle $(i, i+1)$ et posons $E=E_1+E_2+\ldots$ On aura évidemment $\alpha=\overline{E}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ et, comme aucun des ensembles E_i $(i=1,2,\ldots)$ ne contient un sous-ensemble parfait non vide, il en est, comme on le voit sans peine, de même de l'ensemble E, d'où $\alpha<\lambda$, c. q. f. d.

Il est cependant à remarquer qu'un ensemble-somme de deux ensembles linéaires dont les types d'ordre sont $<\lambda$ peut être du type λ. C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une décomposition de la droite en deux ensembles disjoints totalement imparfaits.

Théorème 9. *Quelle que soit la suite infinie α_i $(i=1,2,\ldots)$ de types ordinaux $<\lambda$, il existe un type ordinal β, tel que $\alpha_i<\beta<\lambda$ pour $i=1,2,\ldots$*

Démonstration. D'après le théorème 8 on a $\alpha_1+\alpha_2+\ldots<\lambda$ et, d'après le théorème 7, il existe un type ordinal β tel que $\alpha_1+\alpha_2+\ldots<\beta<\lambda$. On a donc $\alpha_i<\beta<\lambda$ pour $i=1,2,\ldots$, c. q. f. d.

Théorème 10. *Il existe deux types ordinaux $\varphi_1<\lambda$ et $\varphi_2<\lambda$ tels que $\overline{\overline{\varphi}}_1=\overline{\overline{\varphi}}_2=2^{\aleph_0}$ et qu'il n'existe aucun type ordinal ψ de puissance du continu et tel que $\psi<\varphi_1$ et $\psi<\varphi_2$.*

Démonstration. Soit F la famille de toutes les fonctions de Baire définies dans l'intervalle $I=[0\leqslant x\leqslant 1]$ et à valeurs distinctes dans I. On a, comme sait, $\overline{\overline{F}}=2^{\aleph_0}$. D'après un théorème de S. Banach, démontré dans *Fundamenta Mathematicae* 19, p. 13, il existe un ensemble $G\subset I$, tel que $\overline{\overline{G}}=2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{I-G}}=2^{\aleph_0}$ et qu'on a pour $f \in F$:

$$\overline{\overline{f(G)-G}}<2^{\aleph_0} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{Gf(I-G)}}<2^{\aleph_0}.$$

Posons $H=I-G$. Je dis qu'il n'existe aucun ensemble E de puissance du continu tel que $\overline{E}<\overline{G}$ et $\overline{E}<\overline{H}$.

En effet, admettons que E est un tel ensemble. Nous concluons comme ci-dessus qu'il existe un sous-ensemble G_1 de G de puissance $2^{\aleph_0}$ qui est semblable à un sous-ensemble H_1 de H. Il existe donc une fonction g définie dans G_1 et croissante dans G_1, telle que $g(G_1)=H_1$ et, d'après le lemme 2, il existe une fonction f de la famille F, telle que $f(x)=g(x)$ pour $x \in G_1$. On a donc, d'après $G_1<G$:

$$H_1=g(G_1)=f(G_1)\subset f(G),$$

et, comme $\overline{\overline{f(G)-G}}<2^{\aleph_0}$, on trouve, à plus forte raison: $\overline{\overline{H_1-G}}<2^{\aleph_0}$. Or on a $H_1\subset H=I-G$. d'où $H_1=H_1-G$: on trouve ainsi $\overline{\overline{H_1}}<2^{\aleph_0}$, ce qui est impossible.

Nous avons ainsi démontré qu'il n'existe aucun ensemble E de puissance $2^{\aleph_0}$, tel que $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{G}}$ et $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{H}}$. Les ensembles G et H étant linéaires, il en résulte tout de suite, vu le théorème 7 que, $\overline{\overline{G}}<\lambda$ et $\overline{\overline{H}}<\lambda$. Le théorème 10 se trouve ainsi démontré.

Il résulte tout de suite du théorème 10 le

Corollaire. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe deux types ordinaux indénombrables $\varphi_1<\lambda$ et $\varphi_2<\lambda$, tels qu'il n'existe aucun type ordinal indénombrable ψ tel que $\psi<\varphi_1$ et $\psi<\varphi_2$.*

Voici une démonstration directe de ce colloraire.

D'après N. Lusin, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire indénombrable L qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble (linéaire) parfait non dense [6]). Or, j'ai démontré que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire indénombrable S qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble linéaire de mesure nulle [7]).

On a évidemment $\overline{\overline{L}}<\lambda$ et $\overline{\overline{S}}<\lambda$. Je dis qu'il n'existe aucun ensemble indénombrable E tel que $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{L}}$ et $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{S}}$.

En effet, admettons que E soit un tel ensemble. Comme $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{L}}$ et $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{S}}$, l'ensemble E est à la fois semblable à un sous-ensemble L_1 de L et à un sous-ensemble S_1 de S, et il existe une fonction croissante f définie dans L_1 qui transforme L_1 en S_1. Or, l'ensemble L_1, en tant que sous-ensemble de L, jouit de la propriété P suivante: tout ensemble linéaire parfait non dense admet un ensemble au plus dénombrable de points de l'ensemble L_1. Or, comme j'ai démontré [8]) chaque fonction de Baire d'une variable réelle transforme tout ensemble jouissant de la propriété P en un ensemble de mesure nulle. Une fonction croissante dans l'ensemble L_1 pouvant être étendue à une fonction de Baire d'une variable réelle, l'ensemble $S_1=f(L_1)$ est donc de mesure nulle. Or, vu la propriété de l'ensemble S et vu que $S_1\subset S$, l'ensemble S_1 est au plus dénombrable, de même que l'ensemble E (qui est semblable à S_1), contrairement à l'hypothèse.

Notre corollaire se trouve ainsi démontré.

[6]) Comptes Rendus Acad. des Sc. Paris **158** (1914), p. 1259.
[7]) Fund. Math. **5** (1924), p. 184.
[8]) Voir mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne t. IV (Warszawa-Lwów 1934), p. 39.

Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus.

By

G. Kreisel (Reading, England).

Introduction.

The Skolem model.

1. The researches of Loewenheim, Skolem, Gödel [1], and Bernays [1]) have established the following result:

Suppose the formula

$$(1)\qquad (x_{11})\ldots(x_{1n_1})\,(Ey_{11})\ldots(Ey_{1m_1})\,(x_{21})\ldots(Ey_{nm_n})A(x_{11}\ldots y_{nm_n}),$$

where $A(a_{11}\ldots b_{nm_n})$ is a free variable formula not containing function symbols or formula variables without arguments, has the normal Skolem form (HB, II, 179-182)

$$(2)\qquad (x_1)\ldots(x_r)\,(Ey_1)\ldots(Ey_s)B(x_1\ldots x_r y_1\ldots y_s),$$

where $B(a_1\ldots b_s)$ is also a free variable formula, and $B_{0j}(a_1\ldots b_s)$, $1\leqslant j\leqslant N$, are the formula variables occurring in (2). Both (1) and (2) are understood to be formulae of the predicate calculus (HB, II, 375-380) without free variables.

If (2), and therefore (1), is consistent with respect to the predicate calculus, that is their negations cannot be proved in the predicate calculus, formulae $B^*_{0j}(a_1\ldots b_s)$ of the formalism Z_μ (HB, II, 293) of arithmetic can be defined so that the implication

$$(3)\qquad (n)\,[q(n)=0]\rightarrow(x_1)\ldots(x_r)\,(Ey_1)\ldots(Ey_s)B^*(x_1\ldots x_r y_1\ldots y_s)$$

[1]) Hilbert-Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, II, 178-189, and particularly 234-253. This work is referred to in the text by „HB". We usually refer to proofs in HB rather than in the original papers since the proofs are more detailed, and also the book is more accessible.