Sur un théorème de Jessen.

Par

Jean Dieudonné (Nancy).

1. Dans ses travaux sur le produit d'une infinité de mesures, B. Jessen a démontré un intéressant théorème dont nous allons rappeler l'énoncé (voir [2] et [3])[1]. Soit I l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$, $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et $P=I^{\mathcal{N}}$ le „cube" produit d'une infinité d'ensembles I_n ($n\in\mathcal{N}$) identiques à I; pour chaque partition de $\mathcal{N}$ en deux parties complémentaires J, J'[2], on peut identifier P au produit $I^J\times I^{J'}$; pour tout $x=(x_n)\in P$, nous désignerons par x_J et $x_{J'}$, les projections de x sur I^J et $I^{J'}$, de sorte que $x=(x_J,x_{J'})$. Considérons sur chaque I_n la mesure de Lebesgue, et désignons par μ la mesure produit de ces mesures sur l'ensemble P; nous désignerons de même par μ_J la mesure produit sur l'ensemble I^J. Cela étant, soit f une fonction définie dans P et sommable pour la mesure μ; d'après le th. de Fubini, si J est une partie quelconque de $\mathcal{N}$ et J' la partie complémentaire, pour presque tout $x_J\in I^J$, la fonction $x_{J'}\to f(x_J,x_{J'})$ est sommable, la fonction

$$f_J(x_J)=\int_{I^{J'}} f(x_J,x_{J'})\,d\mu_{J'},$$

définie presque partout dans I^J est sommable dans cet ensemble, et on a

$$\int_P f d\mu=\int_{I^J} f_J(x_J)d\mu_J.$$

La fonction f_J peut d'ailleurs être considérée comme définie (presque partout) sur P tout entier, et ne dépendant que des x_n dont l'indice n appartient à J; autrement dit, si $x_J=y_J$, on a

$$f_J(x)=f_J(y).$$

[1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

[2]) De façon générale, l'accent désignera le complémentaire d'une partie de $\mathcal{N}$.

Cela étant, le théorème de Jessen s'énonce comme suit:

Soit (J_n) une suite croissante de parties finies de $\mathcal{N}$, dont la réunion est $\mathcal{N}$; les fonctions f_{J_n} convergent presque partout vers f dans P lorsque n croît indéfiniment.

Soit $\boldsymbol{F}$ l'ensemble (dénombrable) des parties finies J de $\mathcal{N}$, ordonné par inclusion: c'est un ensemble *filtrant* ([1], p. 23) (la réunion de deux parties finies étant finie). Le théorème de Jessen conduirait à penser que, pour presque tout $x\in P$, $f_J(x)$ *tend vers* $f(x)$ *suivant l'ensemble filtrant* $\boldsymbol{F}$ (c'est-à-dire que pour chaque $x\in P$ n'appartenant pas à un ensemble fixe de mesure nulle, à chaque $\varepsilon>0$ correspond une partie finie $J_0(x,\varepsilon)$ telle que, pour toute partie finie $J\supset J_0$, $|f_J(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$). Cette conjecture est d'autant plus plausible que l'on démontre aisément que f_J *converge en moyenne vers* f *suivant* $\boldsymbol{F}$ ([2], p. 747); le but de cette note est de prouver cependant que la conjecture est *inexacte*, en construisant un exemple qui la met en défaut.

2. Comme le filtre des sections de $\boldsymbol{F}$ admet une base dénombrable, le raisonnement qui démontre le théorème d'Egoroff pour la convergence presque partout d'une suite de fonctions s'applique encore lorsqu'il s'agit de la convergence presque partout suivant $\boldsymbol{F}$ d'une famille (g_J) de fonctions mesurables, où J parcourt $\boldsymbol{F}$. De façon précise, si une telle famille converge presque partout vers une fonction g suivant l'ensemble filtrant $\boldsymbol{F}$, pour tout $\delta>0$, il existe un ensemble $H\subset P$, de mesure $\mu H>1-\delta$, tel que dans H la famille (g_J) converge *uniformément* vers g: en d'autres termes, il existe un ensemble fini J_0 tel que, pour *tout* $J\supset J_0$ et *tout* $x\in H$, on ait $|g_J(x)-g(x)|\leqslant\delta$.

Dans l'exemple que nous allons construire, la fonction f sera la fonction caractéristique d'un ensemble A de mesure $<\frac{1}{8}$. Pour tout $J\in\boldsymbol{F}$, désignons par $\varphi_J(x)$ l'enveloppe supérieure des fonctions $f_K(x)$ lorsque K parcourt l'ensemble des parties finies contenant J. Si $f_J(x)$ convergeait presque partout vers $f(x)$, il résulte de ce qui précède qu'il existerait une partie $J_0\in\boldsymbol{F}$ telle que, pour $J\supset J_0$, l'ensemble des points x tels que $\varphi_J(x)>\frac{1}{2}$ aurait une mesure $<\frac{1}{4}$. Or, l'ensemble A sera tel qu'il existe une suite croissante (J_n) de parties finies de $\mathcal{N}$, de réunion $\mathcal{N}$, telles que pour tout n, l'ensemble des $x\in P$ tels que $\varphi_{J_n}(x)>\frac{1}{2}$ ait une mesure $>\frac{7}{16}$; cela prouvera que $f_J(x)$ ne peut converger presque partout vers $f(x)$ suivant $\boldsymbol{F}$.

3. Les ensembles J_n seront des intervalles $1 \leqslant m \leqslant q_n$; la différence entre J_{n+1} et J_n sera divisée en h_n intervalles consécutifs $J_{n,1}, J_{n,2}, \dots, J_{n,h_n}$, et nous désignerons par $p_{n,r}$ le nombre d'éléments de $J_{n,r}$, de sorte que $q_{n+1} - q_n = p_{n,1} + p_{n,2} + \dots + p_{n,h_n}$; k_n désignera le nombre total d'intervalles $J_{m,r}$ $(m < n)$ en lequel est divisé J_n; on a donc $k_{n+1} = k_n + h_n$. Les nombres $p_{n,r}$ et h_n vont être déterminés par récurrence, en même temps que nous définirons l'ensemble A comme réunion d'ensembles $A_{n,r}$ deux à deux sans point commun.

Nous partirons d'une suite décroissante de nombres positifs a_n satisfaisant aux conditions suivantes:

a) la série de terme général a_n est convergente et de somme $<\frac{1}{8}$;

b) la série de terme général $a_n \log \dfrac{1}{a_n}$ est divergente et tous ses termes sont $<\frac{1}{4}$.

On pourra satisfaire à ces conditions par exemple en prenant

$$a_n = \frac{c}{n(\log n)^2},$$

le nombre c étant choisi assez petit.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $a_{k_n+r} = a_{n,r}$. Nous allons supposer définis les k_n ensembles $A_{m,r}$ tels que $m<n$, de sorte que tous ces ensembles soient de la forme $\bar{A}_{m,r} \times I^{J'_n}$, $\bar{A}_{m,r}$ étant contenu dans I^{J_n}; nous supposerons en outre qu'on a $\mu A_{m,r} < a_{m,r}$ pour ces k_n ensembles. Soit $\bar{B}_n$ le complémentaire dans I^{J_n} de la réunion des k_n ensembles $\bar{A}_{m,r}$; on a donc $\mu_{J_n}(\bar{B}_n) > \frac{7}{8}$.

Commençons par définir le nombre $p_{n,1}$ et l'ensemble $A_{n,1}$. Soit $K_{n,1}$ la réunion de J_n et de $J_{n,1}$; nous allons prendre $A_{n,1}$ de la forme $\bar{B}_n \times \bar{C}_{n,1} \times I^{K'_{n,1}}$, $\bar{C}_{n,1}$ étant un ensemble de $I^{J_{n,1}}$ que nous allons définir. Nous prendrons pour $\bar{C}_{n,1}$ le produit de $p_{n,1}$ intervalles T_j (pris chacun dans un facteur I_j de $I^{J_{n,1}}$) de longueur

$$1 - \frac{1}{p_{n,1}} \log \frac{1}{a_{n,1}};$$

la mesure de $\bar{C}_{n,1}$ est donc

$$\left(1 - \frac{1}{p_{n,1}} \log \frac{1}{a_{n,1}}\right)^{p_{n,1}},$$

nombre qui tend en croissant vers $a_{n,1}$ lorsque $p_{n,1}$ croît indéfiniment; nous prendrons $p_{n,1}$ assez grand pour que cette mesure soit comprise entre $a_{n,1}$ et $\frac{1}{2}a_{n,1}$, et que

$$1 - \frac{1}{p_{n,1}} \log \frac{1}{a_{n,1}} > \tfrac{1}{2}.$$

Pour chacun des indices $j \in J_{n,1}$, soit S_j le produit des intervalles T_i d'indice $i \in J_{n,1}$ distinct de j; $A_{n,1}$ peut s'écrire comme le produit $(\bar{B}_n \times S_j) \times (T_j \times I^{K'_{n,1}})$. Pour $J = J_n \cup (J_{n,1} - \{j\})$, on a évidemment $f_J(x) > \frac{1}{2}$ pour tout x appartenant à l'ensemble $(\bar{B}_n \times S_j) \times (I_j \times I^{K'_{n,1}})$; soit $D_{n,1}$ la réunion de ces $p_{n,1}$ ensembles lorsque j parcourt l'ensemble $J_{n,1}$; il est clair qu'on a $\varphi_{J_n}(x) > \frac{1}{2}$ dans l'ensemble $D_{n,1}$. On peut écrire $D_{n,1}$ sous la forme $\bar{B}_n \times \bar{D}_{n,1} \times I^{K'_{n,1}}$, où $\bar{D}_{n,1}$ est réunion des $p_{n,1}$ ensembles $S_j \times I_j$; il est immédiat que la mesure de $\bar{D}_{n,1}$ (dans $I^{J_{n,1}}$) est

$$\left(1 - \frac{1}{p_{n,1}} \log \frac{1}{a_{n,1}}\right)^{p_{n,1}} + \left(\log \frac{1}{a_{n,1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{n,1}} \log \frac{1}{a_{n,1}}\right)^{p_{n,1}-1}.$$

Nous désignerons ce nombre par $\delta_{n,1}$; il est clair que $p_{n,1}$ peut être supposé assez grand pour que $\delta_{n,1}$ soit compris entre $2a_{n,1} \log \dfrac{1}{a_{n,1}}$ et $\frac{1}{2}a_{n,1} \log \dfrac{1}{a_{n,1}}$. Nous désignerons par $\bar{E}_{n,1}$ le complémentaire de $\bar{D}_{n,1}$ dans $I^{J_{n,1}}$, de mesure $1 - \delta_{n,1} > \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant qu'on ait défini les ensembles $J_{n,1}, \dots, J_{n,r}$ et dans chaque produit $I^{J_{n,s}}$ pour $s \leqslant r$, deux ensembles $\bar{C}_{n,s}$ et $\bar{D}_{n,s}$ tels que $\bar{C}_{n,s} \subset \bar{D}_{n,s}$, et que l'on ait les propriétés suivantes:

1° soit $H_{n,s}$ la réunion de $J_{n,1}, \dots, J_{n,s}$, $K_{n,s}$ la réunion de J_n et de $H_{n,s}$; définissons par récurrence les ensembles $\bar{F}_{n,s}$ et $\bar{E}_{n,s}$ dans $I^{H_{n,s}}$ comme étant complémentaires dans ce produit, et tels que $\bar{F}_{n,1} = \bar{D}_{n,1}$, et

$$\bar{F}_{n,s} = (\bar{F}_{n,s-1} \times I^{J_{n,s}}) \cup (\bar{E}_{n,s-1} \times \bar{D}_{n,s});$$

alors $A_{n,s} = \bar{B}_n \times \bar{E}_{n,s-1} \times \bar{C}_{n,s} \times I^{K'_{n,s}}$ a une mesure au plus égale à $a_{n,s}$;

2° l'ensemble $\bar{E}_{n,s-1} \times \bar{D}_{n,s}$ a une mesure $\delta_{n,s}$ comprise entre

$$2a_{n,s} \log \frac{1}{a_{n,s}} \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}a_{n,s} \log \frac{1}{a_{n,s}};$$

en outre la mesure $\delta_{n,1} + \delta_{n,2} + \dots + \delta_{n,r}$ de $\bar{F}_{n,r}$ est $\leqslant \frac{1}{2}$;

3° si on pose $D_{n,s}=\bar{B}_n\times\bar{E}_{n,s-1}\times\bar{D}_{n,s}\times I^{K'_{n,s}}$, on a $\varphi_{J_n}(x)>\frac{1}{2}$ dans l'ensemble $D_{n,s}$.

Soit $\beta_r=1-(\delta_{n,1}+\ldots+\delta_{n,r})\geqslant\frac{1}{2}$ la mesure de $\bar{E}_{n,r}$. Nous prendrons pour $\bar{C}_{n,r+1}$ le produit de $p_{n,r+1}$ intervalles T_j de longueur $1-\frac{1}{p_{n,r+1}}\log\frac{\beta_r}{\alpha_{n,r+1}}$ dans I_j, où j parcourt $J_{n,r+1}$; la mesure de $\bar{C}_{n,r+1}$ est donc

$$\left(1-\frac{1}{p_{n,r+1}}\log\frac{\beta_r}{\alpha_{n,r+1}}\right)^{p_{n,r+1}},$$

nombre qui tend en croissant vers $\frac{\alpha_{n,r+1}}{\beta_r}$ lorsque $p_{n,r+1}$ croît indéfiniment; on peut donc prendre $p_{n,r+1}$ assez grand pour que cette mesure soit comprise entre $\frac{\alpha_{n,r+1}}{\beta_r}$ et $\frac{1}{2}\frac{\alpha_{n,r+1}}{\beta_r}$, et que

$$1-\frac{1}{p_{n,r+1}}\log\frac{\beta_r}{\alpha_{n,r+1}}>\frac{1}{2};$$

si on prend

$$A_{n,r+1}=\bar{B}_n\times\bar{E}_{n,r}\times\bar{C}_{n,r+1}\times I^{K'_{n,r+1}}$$

la mesure de $A_{n,r+1}$ est au plus égale à $\alpha_{n,r+1}$.

Pour chacun des indices $j\in J_{n,r+1}$, soit encore S_j le produit des intervalles T_i d'indice $i\in J_{n,r+1}$ distinct de j; pour $J=K_{n,r}\cup(J_{n,r+1}-\{j\})$, on a $f_J(x)>\frac{1}{2}$ pour tout x appartenant à l'ensemble $\bar{B}_n\times\bar{E}_{n,r}\times S_j\times I_j\times I^{K'_{n,r+1}}$; si $D_{n,r+1}$ est la réunion de ces $p_{n,r+1}$ ensembles lorsque j parcourt $J_{n,r+1}$, il est clair que $\varphi_{J_n}(x)>\frac{1}{2}$ dans $D_{n,r+1}$. Or, on a $D_{n,r+1}=\bar{B}_n\times\bar{E}_{n,r}\times\bar{D}_{n,r+1}\times I^{K'_{n,r+1}}$, où $\bar{D}_{n,r+1}$ est la réunion des $p_{n,r+1}$ ensembles $S_j\times I_j$; la mesure de $\bar{D}_{n,r+1}$ est donc

$$\left(1-\frac{1}{p_{n,r+1}}\log\frac{\beta_r}{\alpha_{n,r+1}}\right)^{p_{n,r+1}}+\left(\log\frac{\beta_r}{\alpha_{n,r+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_{n,r+1}}\log\frac{\beta_r}{\alpha_{n,r+1}}\right)^{p_{n,r+1}-1}.$$

Compte tenu de l'hypothèse $\beta_r\geqslant\frac{1}{2}$, on peut supposer $p_{n,r+1}$ assez grand pour que cette mesure soit comprise entre

$$2\frac{\alpha_{n,r+1}}{\beta_r}\log\frac{1}{\alpha_{n,r+1}}\quad\text{et}\quad\frac{1}{2}\frac{\alpha_{n,r+1}}{\beta_r}\log\frac{1}{\alpha_{n,r+1}}.$$

On en déduit aussitôt que la mesure de $\bar{E}_{n,r}\times\bar{D}_{n,r+1}$ est comprise entre

$$2\,\alpha_{n,r+1}\log\frac{1}{\alpha_{n,r+1}}\quad\text{et}\quad\frac{1}{2}\alpha_{n,r+1}\log\frac{1}{\alpha_{n,r+1}}.$$

La récurrence sur r peut donc se poursuivre jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre r tel que $\delta_{n,1}+\ldots+\delta_{n,r}>\frac{1}{2}$; comme la série de terme général $\alpha_n\log\frac{1}{\alpha_n}$ est *divergente* par hypothèse, il existe toujours un plus petit entier r ayant cette propriété; c'est cet entier qui par définition sera pris pour h_n.

Il est clair alors que les h_n ensembles $A_{n,1},\ldots,A_{n,h_n}$ sont deux à deux sans point commun; il en est de même des h_n ensembles $D_{n,1},\ldots,D_{n,h_n}$; la réunion D_n des $D_{n,r}$ a en outre une mesure $>\frac{7}{16}$, et en tout point de D_n, on a $\varphi_{J_n}(x)>\frac{1}{2}$. La réunion A de tous les ensembles $A_{n,r}$ répond donc bien à la question.

4. L'exemple précédent permet aussi de répondre par la négative à une question analogue concernant les *systèmes dérivants* dans le cube $I^{\mathfrak{N}}$. Pour les cubes de dimension finie I^q, un théorème classique de Vitali montre que les cubes $V_n(x)$ de centre $x\in I^q$ et de coté $1/n$ forment un système dérivant pour les fonctions d'ensemble absolument continues; en particulier, pour toute fonction mesurable et bornée f définie dans I^q, la fonction

$$g_n(x)=\frac{1}{\mu V_n(x)}\int_{V_n(x)}f\,d\mu$$

tend presque partout vers $f(x)$ dans I^q. On est amené naturellement à se demander si le résultat analogue suivant est valable dans $I^{\mathfrak{N}}$: pour toute partie finie J de $\mathfrak{N}$ et tout entier n, désignons par $V_{n,J}(x)$ le produit du cube de centre x_J et de coté $1/n$ dans I^J, et de $I^{J'}$, et pour toute fonction f mesurable et bornée dans $I^{\mathfrak{N}}$, considérons la fonction

$$g_{n,J}(x)=\frac{1}{\mu V_{n,J}(x)}\int_{V_{n,J}(x)}f\,d\mu;$$

cette fonction tend-elle presque partout vers $f(x)$ suivant l'ensemble filtrant produit $\mathfrak{N}\times\boldsymbol{F}$ (la relation d'ordre $(n_1,J_1)\leqslant(n_2,J_2)$ signifiant „$n_1\leqslant n_2$ et $J_1\subset J_2$")? L'exemple construit ci-dessus montre que la réponse est *négative*; en effet, écrivons $V_{n,J}(x)=\bar{V}_{n,J}(x)\times I^{J'}$, où

$\overline{V}_{n,J}(x)$ est le cube de centre x_J et de coté $1/n$; on a, avec les notations ci-dessus, et en vertu du th. de Fubini

$$\int_{V_{n,J}} f d\mu = \int_{\overline{V}_{n,J}} f_J d\mu_J;$$

d'autre part, $\mu V_{n,J}(x) = \mu_J \overline{V}_{n,J}(x)$. Le th. de Vitali rappelé ci-dessus montre donc que, pour tout J, on a

$$\lim_{n\to\infty} g_{n,J}(x) = f_J(x) \quad \text{presque partout.}$$

Comme l'ensemble $\boldsymbol{F}$ est dénombrable, il existerait donc dans $P = I^{\mathcal{N}}$ un ensemble de mesure nulle dans le complémentaire duquel on aurait

$$\lim_{n\to\infty} g_{n,J}(x) = f_J(x) \quad \text{pour } \textit{tout} \quad J \in \boldsymbol{F}.$$

Mais alors si $g_{n,J}(x)$ tendait presque partout vers $f(x)$ suivant $\mathcal{N} \times \boldsymbol{F}$, le th. de la double limite ([1], p. 49) montrerait que $f_J(x)$ tend presque partout vers $f(x)$ suivant $\boldsymbol{F}$, ce que nous avons reconnu être inexact.

Bibliographie.

[1] Bourbaki N., *Éléments de Mathématique*, livre III: Topologie générale, chap. I-II, Actual. Scient. et Ind., **858** (1940), Paris (Hermann).

[2] Dunford N. and Tamarkin J. D., *A principle of Jessen and general Fubini theorems*, Duke Math. Journ. **8** (1941), p. 743-749.

[3] Jessen B., *The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions*, Acta Math. **63** (1934), p. 249-323.

Some Theorems on the Theory of Sets.

By

G. Fodor and I. Ketskeméty (Szeged).

W. Sierpiński and S. Piccard have considered the following problem:

Let E be a given non countable set and suppose that there exists a relation R between the elements of E, such that, for any $x \in E$, the power of the elements $y \in E$ for which xRy, is smaller than the power of E. The problem is whether E has a subset E_1 of the same power and having the property that no two elements $x, y \in E_1$ bear the relation R to each other?

In the present Note we shall consider relations between *elements* and *subsets* of a set:

Let E be a non void set. Denote by H the set of all subsets r of E. Let R be a relation between the elements $x \in E$ and $r \in H$, having the following property:

(A) *for any $r \in H$, there is one and only one $x \in r$ such that xRr holds.*

Problem I. Let E_1 be the subset of E consisting of all the elements $x \in E$ for which the power of the set of the elements $r \in H$ connected with x by the relation xRr, is $\leqslant n$ (n is at most equal to the power of E).

The question is: what is the power of E_1?

Theorem I. *Denoting by z the power of E_1, we have for z and n*

$$2^z - 1 \leqslant n \cdot z. \tag{B}$$

Proof. For any given $x \in E_1$, the power of the set of the $r \in H$ for which xRr, is by definition $\leqslant n$. Thus there are at most nz elements of H in the relation R with some elements of E_1. But the power of the set of all subsets of E_1 is

$$2^z - 1,$$