Le nombre c n'étant pas une fonction rationnelle (aux coefficients rationnels) de α et β, on conclut que le coefficient de c à gauche doit être nul, mais alors le côté gauche de notre formule est nul, ce qui est impossible, le côté droit étant$=1$.

On traite le cas où z est un nombre de la forme 6) d'une façon tout à fait analogue.

Il est ainsi démontré que 1 non $\epsilon\, \varphi(E)$.

On démontre pareillement que 0 non $\epsilon\, \psi(E)$ (en prouvant que l'égalité $\psi(z)=0$ est impossible dans chacun des cas 1)—6) pour le nombre z).

La formule (5) est ainsi établie et il en résulte que les ensembles $E-\{1\}$ et $E-\{0\}$ sont superposables avec E. Le théorème 2 se trouve démontré.

Le problème suivant reste ouvert: existe-t-il un ensemble E non vide plan (ou situé dans l'espace à 3 dimensions) tel que $E-\{p\}\simeq E$ quel que soit le point p de E?

Or, il existe dans l'espace de Hilbert un ensemble dénombrable E tel que, quel que soit le point p de E, l'ensemble $E-\{p\}$ est congruent (c'est-à-dire isométrique) avec E. Tel est par exemple l'ensemble E de tous les points de l'espace de Hilbert dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une seule (d'ailleurs quelconque) qui est$=1$.

Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites dans le cas des espaces abstraits[1]).

Par

Tadeusz Ważewski (Kraków).

§ 1. Considérons le système d'équations

$$f^i(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_n)=0, \qquad (i=1,\dots,n) \tag{1.1}$$

les fonctions f^i étant de classe C^1 dans un ensemble ouvert Ω (c.-à-d. possédant les dérivées partielles du premier ordre continues dans Ω). Supposons que le système (1.1) soit rempli par le point

$$x_\alpha=\bar{x}_\alpha, \quad y_j=\bar{y}_j, \qquad (\alpha=1,\dots,p;\ j=1,\dots,n). \tag{1.2}$$

Si en ce point le jacobien Dét $(f^i_{y_j})$ ne s'annule pas, alors, en vertu d'un théorème classique, il existe un système de fonctions implicites

$$y_i=\sigma^i(x_1,\dots,x_p); \qquad (i=1,\dots,n) \tag{1.3}$$

qui sont de classe C^1 dans un voisinage V du point (1.2) et y remplissent identiquement les équations

$$f^i(x_1,\dots,x_p,\sigma^1(x_1,\dots,x_p),\dots,\sigma^n)=0.$$

Les systèmes (1.1) et (1.3) sont équivalents dans un voisinage suffisamment petit du point (1.2).

Le théorème classique mentionné a un caractère local, car il ne donne aucun renseignement sur la grandeur du rayon r du voisinage V.

Certaines applications (p. ex. à la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles) nécessitent l'évaluation du rayon r.

---

[1]) Communiqué le 2. VI. 1946 à la Section de Cracovie de la Société Polonaise de Math.—sans le Théorème 1 du § 4, et, avec ce théorème, le 13.XII.1946 au Congrès des Mathématiciens Polonais.

Or, j'ai indiqué de telles évaluations en me servant de la théorie des équations différentielles[1]). J'y ai introduit la notion d'allongement contingentiel et paratingentiel pour la transformation auxiliaire

$$z_i = f^i(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_n).$$

La limitation que j'ai indiqué dépend de ces allongements. En introduisant la notation vectorielle

$$x=(x_1,\dots,x_p),\qquad y=(y_1,\dots,y_n),\qquad f(x,y)=(f^1(x_1,\dots,y_n),\dots,f^n(x_1,\dots,y_n))$$

on peut écrire le système (1.1) sous la forme d'une seule équation

$$f(x,y)=0. \tag{1.4}$$

Une telle équation peut être envisagée aussi dans l'hypothèse que x, y et f varient dans certains espaces abstraits.

En admettant l'existence locale des fonctions implicites, je me pose le problème d'évaluer la grandeur du rayon r du voisinage V (théorème 2). J'introduis, à cet effet, aussi sur ce terrain, la notion *d'allongement supérieur et inférieur de la transformation auxiliaire* $z=f(x,y)$ (cf. § 5). (J'ai remarqué que la notion d'allongement paratingentiel, dont je me suis servi dans le travail cité, n'est pas nécessaire pour l'évaluation en question).

Deux lemmes sur les accroissements finis, intéressants par eux mêmes (lemme 1 et lemme 2), jouent un rôle essentiel dans cette évaluation.

Afin de faire ressortir le caractère topologique (au sens de la topologie restreinte) du théorème sur les fonctions implicites, j'ai formulé ce théorème exclusivement dans les termes de la théorie des ensembles (théorème 1), sans faire intervenir l'équation (1.4) et en la remplaçant, en un certain sens, par l'ensemble E de points (x,y) satisfaisant à (1.4). (Les points x et y variant respectivement dans les espaces abstraits X et Y, le point (x,y) varie dans leur produit cartésien (X,Y)). Les allongements en question n'interviennent pas dans le théorème 1. À leur place j'ai introduit la notion de *pente de l'ensemble* E par rapport à l'espace X.

[1]) T. Ważewski, *Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites réelles ou complexes* (Ann. Soc. Pol. de Math., 1947, T. XX, pp. 81-120).

Dans le théorème 3 j'indique une application du théorème 2, à l'évaluation de l'ensemble dans lequel est définie la transformation inverse à une transformation donnée. Le théorème 4 fournit une évaluation de l'ensemble dans lequel une transformation donnée est inversible. L'application de nos résultats dans des cas particuliers nécessite 1°) la démonstration préalable du fait que l'équation (1.4) admet une solution au sens local, 2°) l'évaluation de l'allongement inférieur et supérieur de la fonction $f(x,y)$ (cf. 1.4). J'ai indiqué, dans le travail cité plus haut, de telles évaluations des allongements pour le système (1.4).

Nos résultats sont susceptibles d'applications à la théorie des équations intégrales non linéaires.

§ 2. Soit Y un espace métrique et soit $\varrho(y_1,y_2)$ la distance des points y_1 et y_2 appartenant à Y[1]). Soit $y=\vartheta(t)$ une fonction d'une variable réelle t, définie dans un intervalle Δ et supposons que les valeurs de $\vartheta(t)$ appartiennent à l'espace Y.

Nous définissons l'allongement supérieur droit par la relation

$$\overline{\mathrm{all}}_+\,\vartheta(t)=\limsup_{h\to 0+}\frac{\varrho(\vartheta(t),\vartheta(t+h))}{h}. \tag{2.1}$$

Lemme 1 sur les accroissements finis. *Soit Δ et $\bar{\Delta}$ respectivement l'intervalle ouvert et fermé aux extrémités réelles et finies k et l. Si $\vartheta(t)\in Y$ lorsque $t\in\Delta$, $\vartheta(t)$ est continue dans $\bar{\Delta}$ et*

$$\overline{\mathrm{all}}_+\,\vartheta(t)\leqslant\gamma<+\infty\quad \textit{dans } \Delta$$

alors

$$\varrho(\vartheta(k),\vartheta(l))\leqslant\gamma|k-l|\,[2]). \tag{2.2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons $\lambda(t)=\varrho(\vartheta(k),\vartheta(t))$. La fonction réelle $\lambda(t)$ est continue dans $\bar{\Delta}$. On a pour $h>0$

$$\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\leqslant\frac{\varrho(\vartheta(t+h),\vartheta(t))}{h}.$$

Le nombre dérivé supérieur droit $\bar{D}_+\lambda(t)$ satisfait donc dans Δ à l'inégalité

$$\bar{D}_+\,\lambda(t)\leqslant\overline{\mathrm{all}}_+\,\vartheta(t)\leqslant\gamma.$$

[1]) Les relations $a=b$ et $\varrho(a,b)=0$ sont équivalentes, $\varrho(a,b)=\varrho(b,a)$ et $\varrho(a,b)+\varrho(b,c)\geqslant\varrho(a,c)$.

[2]) Si Y est un espace vectoriel normé, on peut définir la dérivée $\vartheta'(t)$. Si $|\vartheta'(t)|\leqslant\gamma$ dans Δ alors l'inégalité (2.2) a lieu (avec $\varrho(\vartheta(k),\vartheta(l))=|\vartheta(k)-\vartheta(l)|$ car $|\vartheta'(t)|=\overline{\mathrm{all}}_+\vartheta(t)$.

En posant $\mu(t)=\lambda(t)-\gamma t$ on aura $\overline{D}_+\mu(t)\leqslant 0$ dans Δ. La fonction $\mu(t)$ est donc décroissante au sens large dans $\overline{\Delta}$ [1]) et (pour $k\leqslant l$) on aura $\mu(k)\geqslant\mu(l)$, d'où résulte (2.2).

§ 3. ***Notions préliminaires.*** Nous désignerons par $\varrho(a,b)$ la distance de deux points appartenant à un espace métrique. X et Y étant deux espaces métriques nous désignerons par (X,Y) leur produit cartésien composé des couples (x,y) (avec $x\in X$, $y\in Y$).

X-pente d'un ensemble. Soit $E\subset(X,Y)$, $(x_0,y_0)\in E$, $(x_\nu,y_\nu)\neq(x_0,y_0)$, $(x_\nu,y_\nu)\in E$, $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$.

Il peut arriver que pour chaque suite $\{x_\nu,y_\nu\}$ d'une telle sorte on a: $x_\nu\neq x_0$ pour ν assez grand et

$$\limsup_{\nu\to+\infty}\frac{\varrho(y_\nu,y_0)}{\varrho(x_\nu,x_0)}\leqslant\beta. \tag{3.1}$$

Dans ce cas la borne inférieure de tels β sera dite X-pente supérieure de E au point (x_0,y_0) et elle sera désignée par

$$\overline{\text{pente}}\,(E,X;\,x_0,y_0). \tag{3.2}$$

On peut l'appeler pente contingentielle en raison d'une certaine analogie avec la notion de contingent, due à M. Bouligand.

Deux ensembles localement identiques. Si $(x_0,y_0)\in E_1\cdot E_2$ et s'il existe un voisinage W

$$[\varrho(x,x_0)]^2+[\varrho(y,y_0)]^2\leqslant r^2, \qquad (0<r<+\infty)$$

du point (x_0,y_0), tel que $E_1\cdot W=E_2\cdot W$, alors les ensembles E_1 et E_2 seront dits localement identiques au point (x_0,y_0).

X-sphère topologique à X-projection simple. Soit $y=\varphi(x)$ une fonction continue dans une sphère $\varrho(x,x_0)<r$ $(r>0)$ et telle que $\varphi(x)\in Y$ lorsque x appartient à cette sphère. Soit $y_0=\varphi(x_0)$. L'ensemble des points (x,y), tel que $y=\varphi(x)$, $\varrho(x,x_0)<r$ sera dit X-sphère topologique à X-projection simple. Elle est évidemment homéomorphe de la sphère $\varrho(x,x_0)<r$.

[1]) Cf. par exemple O. Haupt et G. Aumann, *Differential- und Integralrechnung*, 1938, T. II, p. 90 (Zusatz).

§ 4. ***Hypothèse H.*** 1⁰) X est un espace vectoriel normé de Banach [1]), Y est un espace métrique *complet*.

2⁰) $(a,b)\in E\subset(X,Y)$ et on désigne par

$$B=\text{Bisph}\,(a,b;\,r,R) \tag{4.1}$$

la „bisphère“ composée des points (x,y), tels que

$$\varrho(x,a)<r,\quad \varrho(y,b)<R,\quad (0<r\leqslant+\infty,\ 0<R\leqslant+\infty).$$

3⁰) L'ensemble E fait partie de B et il est fermé relativement à B.

4⁰) E est, en chaque son point, localement identique à une X-sphère topologique à X-projection simple (cf. § 3).

5⁰) On a (cf. § 3)

$$\overline{\text{pente}}\,(E,X;\,x,y)\leqslant\gamma<+\infty \quad\text{lorsque}\quad (x,y)\in E. \tag{4.2}$$

Théorème 1. Dans l'hypothèse H il existe une fonction $\sigma(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1⁰) $b=\sigma(a)$,

2⁰) $\sigma(x)$ est définie et continue dans la sphère (sphère $S(\omega)$)

$$|x-a|<\omega=\min\left(r,\frac{R}{\gamma}\right)\ [2]), \tag{4.3}$$

3⁰) le diagramme de $\sigma(x)$ fait partie de E, c.-à-d. les points (x,y) satisfaisant à la condition (4.3) et à l'équation

$$y=\sigma(x) \tag{4.4}$$

appartiennent à E,

4⁰) il existe une fonction unique $\sigma(x)$ de telle sorte et l'on a

$$|\sigma(x_2)-\sigma(x_1)|\leqslant\gamma|x_2-x_1| \tag{4.5}$$

lorsque x_1 et x_2 appartiennent à la sphère (4.3).

Démonstration. I. a et c étant deux points de l'espace vectoriel X nous désignerons par $[a,c]$ le segment rectiligne fermé qui les relie. En supprimant dans $[a,c]$ le point c nous obtiendrons le segment $[a,c)$ „ouvert“ du côté de c.

Dans le cas où

$$|l|=1 \quad\text{et}\quad 0<\delta<+\infty$$

le sens du symbole $[a,a+\delta l)$ est claire. Dans le cas $\delta=+\infty$ ce symbole désignera la demi-droite $x=a+tl$ $(0\leqslant t<+\infty)$.

[1]) Si $x_1\in X$, $x_2\in X$, on a $\varrho(x_1,x_2)=|x_2-x_1|$, où $|x|$ désigne la norme du point x.

[2]) Si $\gamma=0$ nous posons $\frac{R}{\gamma}=+\infty$ et $\min\left(r,\frac{R}{\gamma}\right)=r$.

Le symbole

(4.6) $$\mathrm{App}\,\{\psi(x), Z\}$$

désignera que le point $(x, \psi(x))$ appartient à E lorsque $x \in Z$. Ce symbole exprime donc que le diagramme $y=\psi(x)$ de la fonction $\psi(x)$, envisagée dans Z, appartient à l'ensemble E.

Le symbole

(4.7) $$\mathrm{Cont}\,\{\psi(x), Z\}$$

désignera que la fonction $\psi(x)$ est continue dans l'ensemble Z.

Le symbole

(4.8) $$\mathrm{App\,Cont}\,\{\psi(x), Z\}$$

désignera que les propriétés (4.6) et (4.7) ont lieu à la fois.

II. L'ensemble E est, en chaque point, localement identique à une X-sphère topologique. Il en résulte qu'à tout point $(x_0, y_0) \in E$ correspond une fonction de x

(4.9) $$\varphi(x; x_0, y_0)$$

et une sphère $S(x_0, y_0)$ de rayon $r(x_0, y_0)$

(4.10) $$|x-x_0| < r(x_0, y_0), \quad (\text{sphère } S(x_0, y_0))$$

telles que l'on a

(4.11) $$\varphi(x_0; x_0, y_0) = y_0, \quad \mathrm{App\,Cont}\,\{\varphi(x; x_0, y_0),\ S(x_0, y_0)\}.$$

III. *Idée directrice de la démonstration.* La première partie de notre théorème exprime qu'il existe une fonction $\sigma(x)$ unique, telle que

$$b = \sigma(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{App\,Cont}\,\{\sigma(x),\ S(\omega)\}.$$

Or il existe une fonction $\sigma(x)$, telle que

$$\mathrm{App\,Cont}\,\{\sigma(x), \bar{S}\}, \quad b=\sigma(a)$$

où $\bar{S}$ désigne la sphère $|x-a| < r(a,b)$.

Cette fonction est donnée par la formule $\sigma(x)=\varphi(x; a, b)$.

Nous chercherons de prolonger cette solution $\sigma(x)$ sur $S(\omega)$, en prolongeant $\sigma(x)$ le long d'un segment quelconque $[a, a+\omega l)$. Il s'agira donc de construire une fonction $\psi(x; l)$, telle que l'on ait

$$\psi(a; l) = b, \quad \mathrm{App\,Cont}\,\{\psi(x; l),\ [a, a+\omega l)\}.$$

La fonction définie par les relations

$$\sigma(x) = \psi\left(x; \frac{x-a}{|x-a|}\right) \quad \text{pour} \quad x \neq a; \ \sigma(a) = b$$

vérifiera alors la condition

$$\mathrm{Cont}\,\{\sigma(x), [a, a+\omega l)\}$$

lorsque $|l|=1$. Elle sera donc continue lorsque l'on l'envisagera *exclusivement* sur $[a, a+\omega l)$. Il s'agira de prouver que $\sigma(x)$ envisagée dans $S(\omega)$ est continue dans $S(\omega)$. L'inégalité (4.5) découlera de (4.2) par l'intermédiaire du lemme 1 sur les acroissements finis. Cette inégalité et l'hypothèse que l'espace Y est complet permettra de prouver la prolongeabilité de $\sigma(x)$ le long de $[a, a+\omega l)$.

IV. Supposons que

$$x_0 \in Z, \quad y_0 = \chi(x_0), \quad \mathrm{App}\,(\chi(x), Z)$$

et que la fonction $\chi(x)$ (envisagée sur Z) soit continue au point x_0. Il existe alors un voisinage V de x_0, tel que

(4.12) $$\chi(x) = \varphi(x; x_0, y_0) \quad \text{lorsque} \quad x \in V \cdot Z.$$

Ceci résulte immédiatement de ce que l'ensemble E est au point (x_0, y_0) identique à la X-sphère topologique

$$y = \varphi(x; x_0, y_0), \quad |x-x_0| < r(x_0, y_0).$$

V. De la remarque précédente résulte la propriété suivante (cf. 4.11). Si

$$x_0 \in Z, \quad \chi(x_0) = \psi(x_0), \ \mathrm{App}\,(\psi(x), Z), \ \mathrm{App}\,(\chi(x), Z)$$

et si les fonctions χ et ψ sont continues au point x_0, alors il existe un voisinage V de x_0, tel que

(4.13) $$\chi(x) \equiv \psi(x) \quad \text{dans} \quad Z \cdot V$$

et tel que l'on a

(4.14) $$\mathrm{App\,Cont}\,\{\chi(x), Z\cdot V\}, \quad \mathrm{App\,Cont}\,\{\psi(x), Z\cdot V\}.$$

VI. Supposons que le segment $[c, d]$ appartienne à la sphère $|x-a| < \omega$ (cf. 4.3) et que l'on ait

$$\mathrm{App\,Cont}\,\{\chi(x),\ [c, d]\}, \quad \mathrm{App\,Cont}\,\{\psi(x),\ [c, d]\}, \quad \chi(c) = \psi(c).$$

On a alors

(4.15) $$\psi(x) \equiv \chi(x) \quad \text{lorsque} \quad x \in [c, d].$$

Supposons, en effet, que (4.15) n'ait pas lieu. Il existe donc un point $x_0 \epsilon [c,d]$, tel que l'identité (4.15) a lieu dans $[c,x_0)$, sans qu'elle ait lieu dans le même segment prolongé si peu que l'on veut, vers l'extrémité d. En vertu de la continuité on aura $\psi(x_0)=\chi(x_0)=y_0$, et, en vertu de (4.12),

$$\psi(x)=\chi(x)=\varphi(x;\, x_0,y_0)$$

dans un petit voisinage de x_0 sur $[c,d]$, ce qui n'est pas possible.

La propriété énoncée au commencement du présent alinéa reste évidemment vraie lorsque l'on remplace $[c,d]$ par $[c,d)$ ou par la demi-droite $[c,c+\delta l)$, $(\delta=+\infty)$.

VII. Si l'on a

$$\text{App Cont}\,\{\varphi(x),\,[c,d]\},$$

alors

$$\varrho(\varphi(c),\varphi(d))\leqslant\gamma|d-c|. \tag{4.16}$$

Il suffit de le prouver au cas $c\neq d$. Posons $l=\dfrac{d-c}{|d-c|}$ et

$$\vartheta(t)=\varphi(c+tl),\quad \text{pour}\quad 0\leqslant t\leqslant|d-c|.$$

Soit

$$0<t<|d-c|,\quad h_\nu\to 0,\ h_\nu>0$$

et posons

$$x_0=c+tl,\qquad x_\nu=c+(t+h_\nu)l$$
$$y_0=\varphi(c+tl),\qquad y_\nu=\varphi(c+(t+h_\nu)l).$$

Nous aurons $(x_0,y_0)\,\epsilon\,E$, $(x_\nu,y_\nu)\,\epsilon\,E$

$$\frac{\varrho(\vartheta(t+h_\nu),\vartheta(t))}{h_\nu}=\frac{\varrho(y_\nu,y_0)}{\varrho(x_\nu,x_0)}.$$

En appliquant la définition de la pente supérieure et de l'allongement supérieur (cf. 2.1) on conclura en vertu de (4.2) que $\overline{\mathrm{all}}_+\vartheta(t)\leqslant\gamma$ pour $0<t<|d-c|$. La fonction $\vartheta(t)$ étant continue dans l'intervalle fermé $[0,|d-c|]$, on aura, en raison du lemme 1 sur les accroissements finis que

$$\varrho(\vartheta(0),\vartheta(|d-c|))\leqslant\gamma|d-c|$$

d'où résulte (4.16).

VIII. Soit $|l|=1$. Nous affirmons qu'il existe une fonction unique

$$\psi(x;\, l)$$

telle que

$$\psi(a;l)=b,\quad \text{App Cont}\,\{\psi(x;l),[a,a+\omega l)\} \tag{4.17}$$

où ω est défini par la relation (4.3).

Soit, en effet, t un nombre $0<t<\omega$ et envisageons les relations

$$\psi(a;l)=b,\quad \text{App Cont}\,\{\psi(x;l),\,[a,a+tl)\}. \tag{4.18}$$

En vertu de (4.15) il existe au plus une fonction $\psi(x;l)$ satisfaisant à cette relation. Comme $(a,b)\,\epsilon\,E$, il existe $\psi(x;l)$ vérifiant (4.18) pour les t positifs, suffisamment petits. Une telle fonction a la forme (cf. 4.11)

$$\psi(x;l)=\varphi(x;a,b).$$

Soit η la borne supérieure des $t<\omega$ pour lesquels il existe une fonction $\psi(x;l)$ vérifiant (4.18). Il suffit évidemment de prouver $\eta=\omega$. Supposons, pour la démonstration par impossible, que $\eta<\omega$. Posons $c=a+\eta l$, et soit $\{x_\nu\}$ une suite quelconque, telle que

$$x_\nu\,\epsilon\,[a,c),\quad x_\nu\to c. \tag{4.19}$$

On a $0<|c-a|=\eta$. On a en vertu de (4.16)

$$\varrho[\psi(x_\nu;l),\psi(x_\mu;l)]\leqslant\gamma|x_\nu-x_\mu|,\quad (\mu\neq\nu).$$

Les points $\psi(x_\nu;l)$ appartenant à l'espace complet Y, il en résulte que la suite $\psi(x_\nu;l)$ est convergente et par conséquent

$$\psi(x_\nu;l)\to\overline{y}.$$

On a (cf. 4.16)

$$\varrho(\psi(x_\nu;l),b)=\varrho(\psi(x_\nu;l),\psi(a;l))\leqslant\gamma|x_\nu-a|$$

et à la limite (cf. 4.19 et 4.3)

$$\varrho(\overline{y},b)\leqslant\gamma|c-a|=\gamma\eta<\gamma\omega\leqslant R,\quad |c-a|<\omega\leqslant r,$$

c.-à-d. (cf. 4.1) $(c,\overline{y})\,\epsilon$ Bisph $(a,b;\,r,R)$.

Mais on a

$$\text{App Cont}\,\{\psi(x;l),\,[a,c)\}.$$

L'ensemble E étant fermé relativement à la Bisph $(a,b;\,r,E)$, on en déduit facilement que $(c,\overline{y})\,\epsilon\,E$. En posant

$$\psi(c;l)=\overline{y}$$

on voit que l'on a

$$\text{App Cont}\,\{\psi(x;l),\,[a,c]\}.$$

En posant

$$\psi(x;l)=\varphi(x;c,\overline{y})\quad \text{pour}\quad x=a+tl\quad (\text{ou } t \text{ surpasse très peu } \eta)$$

on aura (cf. 4.11)

$$\text{App Cont}\,\{\psi(x;l),\ [a,a+tl]\},$$

ce qui est contraire à la définition de η.

IX. Posons

$$\sigma(x)=\psi\left(x;\frac{x-a}{|x-a|}\right)\quad\text{pour}\quad 0<|x-a|<\omega,\quad \sigma(a)=b. \tag{4.20}$$

D'après (4.17) on aura

$$\sigma(a)=b,\quad \text{App Cont}\,\{\sigma(x);[a,a+\omega l)\}\ \text{lorsque}\ |l|=1 \tag{4.21}$$

et par suite

$$\text{App}\,\{\sigma(x);\,S(\omega)\}. \tag{4.22}$$

Nous affirmons que l'on a

$$\text{App Cont}\,\{\sigma(x);S(\omega)\} \tag{4.23}$$

où $S(\omega)$ désigne la sphère (4.3).

Soit l_0 un point quelconque, tel que $|l_0|=1$. Afin de prouver que $\sigma(x)$ est continue dans $S(\omega)$ il suffit de prouver que $\sigma(x)$, envisagée dans $S(\omega)$, est continue en chaque point du segment $[a,a+\omega l_0)$. Considérons le segment

$$[a,a+tl_0) \tag{4.24}$$

avec $0\leqslant t<\omega$. Désignons par η la borne supérieure des t, tels que $\sigma(x)$ (envisagée dans $S(\omega)$) est continue sur le segment (4.24).

Il suffit de prouver que $\eta=\omega$. Supposons, pour la démonstration par impossible, que $\eta<\omega$.

On a sur le segment $[a,a+\omega l)$

$$\sigma(x)=\psi(x;l)$$

d'où il résulte que

$$\sigma(x)=\varphi(x;\,a,b)\quad\text{pour}\quad |x-a|\leqslant r(a,b)$$

(cf. 4.20, 4.10, 4.11, 4.13).

Il en résulte que $\sigma(x)$ est continue sur le segment (4.24) lorsque $t=r(a,b)$. On a donc $\eta\geqslant r(a,b)>0$.

Nous prouverons que $\sigma(x)$ est continue au point

$$c=a+\eta l_0.$$

Or le point $(c,\sigma(c))=(a+\eta l_0,\,\psi(a+\eta l_0,l_0)$ appartient à E (cf. 4.17). En ce point l'ensemble E est localement identique à une X-sphère topologique

$$y=\varphi(x;c,\,\sigma(c)),\ |x-c|<r(c,\sigma(c)).$$

Nous écrirons cette condition sous une forme plus abrégée

$$y=\varphi(x),\quad |x-c|<\bar{r}.$$

On a (cf. 4.11)

$$\varphi(c)=\sigma(c). \tag{4.25}$$

Considérons le point $d=a+(\eta-\varepsilon)l_0$, le nombre $\varepsilon>0$ étant choisi si petit que d appartienne au segment $[a,c]$ et à la sphère

$$|x-c|<\bar{r}\quad(\text{sphère } S). \tag{4.26}$$

On a évidemment (cf. 4.11)

$$\text{App Cont}\,\{\varphi(x);\,[d,c]\}.$$

Cette relation rapprochée de (4.21) et de (4.25) donne en vertu de (4.15)

$$\varphi(x)=\sigma(x)\quad\text{pour}\quad x\in[d,c] \tag{4.27}$$

et en particulier $\varphi(d)=\sigma(d)$. Les fonctions φ et σ étant continues au point d (cf. 4.11 et la définition de d et de η), on aura pour un petit voisinage V de d (cf. 4.12 et 4.13) App Cont $\{\varphi(x),V\}$, App Cont $\{\sigma(x),V\}$,

$$\varphi(x)\equiv\sigma(x)\quad\text{dans } V.$$

Soit $\{x_\nu\}$ une suite quelconque, telle que $x_\nu\to c$, et posons

$$l_\nu=\frac{x_\nu-a}{|x_\nu-a|},\quad \xi_\nu=a+(\eta-\varepsilon)l_\nu.$$

On a $x_\nu=a+l_\nu|x_\nu-a|$. On aura $\xi_\nu\to d$, donc, pour les indices assez grands on aura (cf. 4.26)

$$\xi_\nu\in V,\quad \xi_\nu\in S,\quad x_\nu\in S.$$

Pour les ν assez grands on aura donc (cf. 4.27)

$$\varphi(\xi_\nu)=\sigma(\xi_\nu)\quad\text{et}\quad [x_\nu,\xi_\nu]\subset S, \tag{4.28}$$

car la sphère S est convexe. Les points x_ν et ξ_ν appartenant à $[a,a+\omega l_\nu)$ on aura (cf. 4.21)

$$\text{App Cont}\,\{\sigma(x),\,[x_\nu,\xi_\nu]\}.$$

On a aussi App Cont $\{\varphi(x), [x_\nu, \xi_\nu]\}$ donc on aura en vertu de (4.28) et de (4.15) $\sigma(x_\nu)=\varphi(x_\nu)$. Comme $\varphi(x)$ est continue au point c, on obtiendra (cf. 4.25)

$$\sigma(x_\nu)=\varphi(x_\nu)\to\varphi(c)=\sigma(c)$$

ce qui prouve que $\sigma(x)$ est continue au point c. Comme en outre App $\{\sigma(x), S(\omega)\}$ (cf. 4.22), il en résulte (cf. 4.13) que $\sigma(x)=\varphi(x)$ dans un voisinage de $c=a+\eta l_0$. Il existe donc un $\eta_1>\eta$, tel que $\sigma(x)$ (envisagée dans $S(\omega)$) est continue en chaque point du segment $[a, a+\eta_1 l_0]$, ce qui n'est pas compatible avec la définition de η. La continuité de $\sigma(x)$ dans $S(\omega)$ se trouvant ainsi démontrée, on conclut à la vérité de la relation (4.23).

X. Pour terminer la démonstration il suffit de remarquer que l'inégalité (4.5) résulte de (4.16).

§ 5. *Allongement (contingentiel) supérieur et inférieur.*

I. Soient X et Z deux espaces métriques, $g(x)$ une fonction définie dans une partie B de X, fonction dont les valeurs appartiennent à Z.

II. x et ξ $(x\neq\xi)$ désignant respectivement un point fixe et un point variable dans B, nous posons par définition

$$\overline{\mathrm{all}}\, g(x)=\limsup_{\xi\to x}\frac{\varrho(g(x),g(\xi))}{\varrho(x,\xi)}, \tag{5.1}$$

$$\underline{\mathrm{all}}\, g(x)=\liminf_{\xi\to x}\frac{\varrho(g(x),g(\xi))}{\varrho(x,\xi)}. \tag{5.2}$$

Ces nombres (non négatifs, finis ou égales à $+\infty$) seront dits respectivement allongement contingentiel supérieur et inférieur de $g(x)$. Le premier d'eux constitue une généralisation de l'allongement supérieur défini dans le § 2.

Si Y est un autre espace métrique et $f(x,y)$ est une fonction aux valeurs appartenant à Z et définie dans un ensemble C faisant partie de l'espace (X,Y) (produit cartésien de X et Y), nous désignerons par

$$\overline{\mathrm{all}}_x f(x,y),\quad \underline{\mathrm{all}}_x f(x,y),\quad \overline{\mathrm{all}}_y f(x,y),\quad \underline{\mathrm{all}}_y f(x,y)$$

les allongements calculés respectivement sous l'hypothèse que y ou x soit considéré comme fixe.

Lemme 2 sur les accroissements finis[1]. *Soit X un espace vectoriel normé, Z un espace métrique, B une partie de X, $[c,d]$, où $c\neq d$, un segment faisant partie de B, $g(x)$ une fonction définie dans B (fonction dont les valeurs appartiennent à Z). Supposons que $g(x)$ est continue aux points c et d et que*

$$\overline{\mathrm{all}}\, g(x)\leqslant a \quad \textit{lorsque} \quad x\in(c,d). \tag{5.3}$$

Ceci étant admis on a

$$\varrho(g(d),g(c))\leqslant a|d-c|. \tag{5.4}$$

Démonstration. Soit t une variable réelle et posons

$$\vartheta(t)=g\left(c+t\,\frac{d-c}{|d-c|}\right).$$

$g(x)$ étant évidemment continue en tout point x vérifiant (5.3), $\vartheta(t)$ est continue dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant|d-c|$. On a, en vertu de (5.3) et de (2.1),

$$\overline{\mathrm{all}}_+\,\vartheta(t)\leqslant a \quad \text{lorsque} \quad 0<t<|d-c|.$$

En vertu de (2.2) il en résulte que

$$\varrho(\vartheta(|d-c|),\vartheta(0))\leqslant a|d-c|$$

d'où l'on déduit (5.4).

§ 6. *Théorème 2. Nous admettons les hypothèses suivantes:*

1°) *X est un espace vectoriel normé de Banach, Y et Z sont deux espaces métriques, Y est un espace complet*[2].

2°) *$a\in X$, $b\in Y$, $c\in Z$.*

3°) *La „bisphère" B* Bisph $(a,b;r,R)$ *est un ensemble appartenant au produit cartésien XY des espaces X et Y, composé des points (x,y) satisfaisant aux conditions*

$$|x-a|<r\leqslant+\infty,\quad \varrho(b,y)<R\leqslant+\infty \quad \textit{(bisphère } B\textit{)}. \tag{6.1}$$

---

[1]) On doit à M. Kerner un théorème moins général et acquis par une autre voie. Il est lié avec la notion de la différentielle totale et, par suite, avec la théorie des opérations linéaires (cf. M. Kerner, *Zur Theorie der impliziten Funktionen*, Studia Math. **3**, p. 169). C'est M. Orlicz qui a bien voulu attirer mon attention sur cet article à l'occasion de ma communication sur les fonctions implicites au Congrès des Mathématiciens Polonais (le 13. XII. 1946).

[2]) Nous ne supposons pas que les espaces X et Z soient complets. Nous ne supposons non plus qu'un des espaces X et Z soit vectoriel.

4^0) *$f(x,y)$ est une fonction continue dans B, fonction dont les valeurs appartiennent à l'espace Z.*

5^0) *$f(a,b)=c$.*

6^0) *Si $(x,y)\in B$ et $f(x,y)=c$, alors on a*

$$\overline{\text{all}}_x f(x,y)\leqslant\alpha<+\infty, \tag{6.2}$$

$$\underline{\text{all}}_y f(x,y)\geqslant\beta>0. \tag{6.3}$$

où α et β sont fixes et $0<\beta<+\infty$

7^0) *Si*

$$(\bar{x},\bar{y})\in B,\quad f(\bar{x},\bar{y})=c$$

alors il existe une fonction $\varphi(x)$ continue dans un certain voisinage

$$|x-\bar{x}|<\delta,$$

fonction vérifiant dans ce voisinage l'identité

$$f(x,\varphi(x))\equiv c$$

et telle que l'équation

$$f(x,y)=c \tag{6.3 bis}$$

est équivalente à l'équation

$$y=\varphi(x)$$

dans un voisinage suffisamment petit du point $(\bar{x},\bar{y})$ [1]).

Désignons par $S(\omega)$ la sphère appartenant à l'espace X et définie par l'inégalité

$$|x-a|<\omega=\min\left(r,\frac{\beta}{\alpha}R\right)^{2)}\quad (\textit{sphère } S(\omega)).$$

Ceci étant admis nous affirmons qu'il existe une fonction unique $\sigma(x)$, pour laquelle on a

$$\sigma(a)=b$$

qui, en plus, est continue dans la sphère $S(\omega)$ et vérifie, pour tous les points $x\in S(\omega)$, l'équation

$$f(x,\sigma(x))=c\ ^{3)}.$$

[1]) Ceci veut dire qu'il existe au moins un nombre $\eta>0$, tel que le système de conditions en (x,y)

$$(x,y)\in B,\quad f(x,y)=c,\quad |x-\bar{x}|<\eta,\quad \varrho(\bar{y},y)<\eta$$

est équivalent au système

$$(x,y)\in B,\quad y=\varphi(x),\quad |x-\bar{x}|<\eta,\quad \varrho(\bar{y},y)<\eta.$$

Il en résulte que, si $(\bar{x},\bar{y})\in B$, $f(\bar{x},\bar{y})=c$, alors $\bar{y}=\varphi(\bar{x})$.

[2]) Si $\alpha=0$, nous posons $\frac{\beta}{\alpha}R=+\infty$ et l'on a, dans ce cas, $\omega=r$.

[3]) La fonction $\sigma(x)$ constitue une fonction implicite (continue) définie par l'équation fonctionnelle $f(x,\sigma(x))=c$.

Nous affirmons en plus que l'on a

$$|\sigma(x_2)-\sigma(x_1)|\leqslant\frac{\alpha}{\beta}|x_2-x_1|, \tag{6.4}$$

$$\overline{\text{all}}\ \sigma(x)\leqslant\frac{\alpha}{\beta} \tag{6.5}$$

pour tous les x, x_1 et x_2 appartenant à $S(\omega)$.

Démonstration. Désignons par E l'ensemble de points (x,y) satisfaisant aux conditions

$$(x,y)\in B,\quad f(x,y)=c.$$

On vérifie facilement que l'ensemble E satisfait aux prémisses 1^0, 2^0, 3^0 et 4^0 du théorème 1.

Nous allons prouver qu'il satisfait aussi à la dernière prémisse 5^0 (cf. 4.2) de ce théorème lorsque l'on pose $\gamma=\alpha/\beta$. Autrement dit nous prouverons que

$$\overline{\text{pente}}\ (E,X;x,y)\leqslant\gamma=\alpha/\beta\quad\text{lorsque}\quad (x,y)\in E. \tag{6.6}$$

Supposons, pour la démonstration par impossible, que pour un certain point (x_0,y_0) on ait

$$(x_0,y_0)\in E,\quad \overline{\text{pente}}\ (E,X;x_0,y_0)>\gamma=\alpha/\beta\geqslant 0.$$

Il existe donc une suite des points (x_ν,y_ν), tels que

$$(x_\nu,y_\nu)\in E,\quad (x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0),\quad x_\nu\neq x_0,$$

$$\frac{\varrho(y_\nu,y_0)}{\varrho(x_\nu,x_0)}=\frac{\varrho(y_\nu,y_0)}{|x_\nu-x_0|}\to\overline{\text{pente}}\ (E,X;x_0,y_0)>\frac{\alpha}{\beta}\geqslant 0. \tag{6.7}$$

À partir d'un indice ν suffisamment grand on aura donc

$$\varrho(y_\nu,y_0)\neq 0,\quad y_\nu\neq y_0. \tag{6.8}$$

Comme $(x_0,y_0)\in E$, $(x_\nu,y_\nu)\in E$ on aura

$$(x_0,y_0)\in B,\quad (x_\nu,y_\nu)\in B,\quad f(x_0,y_0)=c,\quad f(x_\nu,y_\nu)=c$$

et par suite

$$f(x_\nu,y_\nu)=f(x_0,y_0). \tag{6.9}$$

(x_0,y_0) est un point intérieur de B, car dans l'inégalité (6.1) interviennent des inégalités fortes. Pour le point auxiliaire (x_0,y_ν) on aura $(x_0,y_\nu)\to(x_0,y_0)$. Pour les indices suffisamment grands les points (x_0,y_ν) appartiennent donc à B.

Les x_ν et x_0 et, par conséquent, le segment $[x_0, x_\nu]$ appartiennent à la sphère $|x-a|<r$. On a (cf. 6.2)

$$\overline{\mathrm{all}}_x\, f(x,y_\nu) \leqslant \alpha < +\infty \quad \text{lorsque} \quad x \in [x_0, x_\nu].$$

En vertu du lemme 2 sur les accroissements finis on aura

$$\varrho(f(x_\nu,y_\nu), f(x_0,y_\nu)) \leqslant \alpha |x_\nu - x_0|$$

(pour ν assez grand). Cette inégalité rapprochée de (6.9) donne

$$\varrho(f(x_0,y_0), f(x_0,y_\nu)) = \varrho(f(x_\nu,y_\nu), f(x_0,y_\nu)) \leqslant \alpha |x_\nu - x_0| = \alpha \varrho(x_0,x_\nu).$$

De là il vient que (cf. 6.8)

$$(6.10) \qquad \frac{\varrho(f(x_0,y_0), f(x_0,y_\nu))}{\varrho(y_0,y_\nu)} \cdot \frac{\varrho(y_0,y_\nu)}{\varrho(x_0,x_\nu)} \leqslant \alpha.$$

Or en vertu de (6.3) on a

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{\varrho(f(x_0,y_0), f(x_0,y_\nu))}{\varrho(y_0,y_\nu)} \geqslant \beta > 0.$$

Il résulte donc des relations (6.10) et (6.7) que

$$\beta\, \overline{\text{pente}}\, (E, X; x_0, y_0) \leqslant \alpha$$

car β et la pente en question sont positifs (cf. 6.7). Cette inégalité n'étant pas compatible avec (6.7), nous avons abouti à une contradiction. La relation (6.6) se trouve ainsi démontrée.

Il est manifeste que la fonction $\sigma(x)$ dont l'existence est assurée par le théorème 1, satisfait à la thèse du présent théorème.

L'inégalité (6.5) résulte immédiatement de (6.4).

Dans le cas où l'équation (6.3 bis) coïncide avec le système (1.1) (écrit sous la forme vectorielle) on peut choisir comme α et β p. ex. les nombres

$$\alpha = \text{borne supérieure} \sqrt{\sum_i \sum_k |f^i_{x_k}|^2},$$

$$\beta = \text{borne inférieure} \frac{|\text{Dét}\,(f^i_{y_j})|}{\left\{\sqrt{\sum_i \sum |f^i_{y_j}|^2}\right\}^{p-1}},$$

ces bornes étant calculées pour le point (x,y) où $x=(x_1,\dots,x_p)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ variant dans la bisphère (6.1) (cf. T. Ważewski loc. cit. p. 89).

§ 7. Soit $k(u)$ une fonction définie dans un ensemble B faisant partie d'un espace abstrait, fonction dont les valeurs appartiennent à un autre espace abstrait. Les fonctions $k(u)$ de cette sorte sont dites transformations. L'équation

$$(7.1) \qquad v = k(u)$$

est „associée" à cette transformation dans le système de variables u et v. Il est commode d'appeler cette équation aussi une transformation.

Si $C \subset B$ nous désignerons par $k(C)$ l'image de l'ensemble C par l'intermédiaire de la transformation (7.1).

Les ensembles B et $k(B)$ sont dits respectivement domaine et contredomaine de la transformation (7.1).

Soit

$$(7.2) \qquad u = l(v)$$

une autre transformation dont le domaine est D.

La *transformation* (7.2) sera dite *inverse* de (7.1) *au sens large* lorsque l'on a identiquement

$$(7.3) \qquad v = k(l(v)) \quad \text{pour} \quad v \in D.$$

La transformation (7.2) sera dite *inverse* de (7.1) *au sens strict* lorsque les équations (7.1) et (7.2) sont équivalentes.

La transformation (7.1) sera dite inversible au sens strict lorsqu'il existe une transformation (7.2) inverse de (7.1) au sens strict. La condition nécessaire et suffisante pour que (7.1) soit inversible au sens strict consiste évidemment en ce que l'on ait

$$k(u_1) \neq k(u_2) \quad \text{lorsque} \quad u_1 \neq u_2,\ u_1 \in B,\ u_2 \in B.$$

Si la transformation (7.1) n'est pas inversible au sens strict, il peut arriver qu'il existe un ensemble $C \subset B$, tel que

$$k(u_1) \neq k(u_2) \quad \text{lorsque} \quad u_1 \neq u_2,\ u_1 \in C,\ u_2 \in C.$$

Dans ce cas on dira que la *transformation* (7.1) *„envisagée dans C"* (ou *„restreinte" à l'ensemble C*) est *inversible au sens strict.*

La transformation $v=\sin(u)$ admet comme transformations inverses au sens large les transformations $u=\arcsin(v)$,

$$u = \frac{\pi}{2} - \arccos(v), \quad u = 2n\pi + \arcsin(v), \quad u = (2n+\tfrac{1}{2})\pi - \arccos(v).$$

La transformation $v=\sin(u)$ n'est pas cependant inversible au sens strict. Elle le devient lorsqu'on l'envisage dans un des intervalles

$$\Delta_k = \left[k\frac{\pi}{2}, (k+2)\frac{\pi}{2}\right], \quad (k=0, \pm1, \pm2, \dots).$$

Parmi les transformations inverses au sens large ce sont les transformations continues qui sont particulièrement importantes dans les applications pratiques.

§ 8. ***Théorème 3.*** *Nous admettons les hypothèses suivantes:*

1^0) *X est un espace vectoriel normé de Banach, Y est un espace métrique et complet.*

2^0) *$a\in X$, $b\in Y$.*

3^0) *$g(y)$ est une fonction (transformation) dont les valeurs appartiennent à X et qui est continue dans la sphère, composée des points y, tels que*

(8.1) $$\varrho(b,y)<R\leqslant+\infty.$$

4^0) *$g(b)=a$.*

5^0) *Pour les y appartenant à la sphère* (8.1) *on a*

$$\underline{\text{all}}\, g(y)\geqslant\beta>0$$

où β est un nombre fixe et $0<\beta<+\infty$.

6^0) *Si $\bar{y}$ appartient à la sphère* (8.1) *et*

$$\bar{x}=g(\bar{y})$$

alors il existe une fonction $\tau(x)$ continue dans un voisinage $|x-\bar{x}|<\delta$ de $\bar{x}$ et telle que l'équation en x et y

$$x=g(y)$$

est équivalente à l'équation $y=\tau(x)$ dans un voisinage suffisamment petit du point (x,y)[1]*. (De cette équivalence il résulte que $\bar{y}=\tau(\bar{x})$ et $x=g(\tau(x))$ lorsque $|x-\bar{x}|<\zeta$ où ζ est suffisamment petit).*

Considérons la sphère

(8.2) $$|x-a|<\beta R\,^{2)}\quad (\mathrm{Sph}\,(a,\beta R)).$$

Ceci étant admis il existe une fonction (transformation) unique $\sigma(x)$ pour laquelle on a

(8.3) $$\sigma(a)=b$$

et qui, en outre, est continue dans la sphère (8.2) *et y vérifie l'identité*[3])

(8.4) $$x\equiv g(\sigma(x)).$$

[1]) Ceci veut dire qu'il existe un nombre $\eta>0$, tel que le système de trois conditions $y=\tau(x)$, $|x-\bar{x}|<\eta$, $\varrho(y,\bar{y})<\eta$ (x,y variables; $\bar{x},\bar{y}$ fixes) est équivalent au système de conditions $x=g(y)$, $|x-\bar{x}|<\eta$, $\varrho(y,\bar{y})<\eta$.

[2]) Si $\beta=+\infty$ alors $\beta R=+\infty$.

[3]) Ceci veut dire que $\sigma(x)$ constitue l'unique transformation inverse au sens large de $g(y)$ qui satisfait à la condition initiale (8.3) et qui est continue dans la sphère (8.2) constituant son domaine.

Nous affirmons en plus que l'on a les inégalités

$$\overline{\text{all}}\,\sigma(x)\leqslant\frac{1}{\beta},\qquad |\sigma(x_2)-\sigma(x_1)|\leqslant\frac{1}{\beta}|x_2-x_1|$$

pour tous les points x, x_1, x_2 de la sphère (8.2).

Démonstration. Afin de ramener le présent théorème au théorème 2 posons:

$$\text{Espace } Z=\text{espace } X,\quad r=+\infty,\quad f(x,y)=g(y)-x,\quad c=0,\quad \alpha=1.$$

Cela posé, on vérifie facilement que les prémisses du théorème 2 sont vérifiées et on conclut facilement à la vérité du présent théorème.

Théorème 4. *Gardons les hypothèses du théorème précédent en supposant accessoirement que*

7^0) *X et Y sont deux espaces vectoriels normés et complets de Banach (au lieu de supposer que Y soit seulement un espace métrique et complet).*

8^0)

(8.5) $$\overline{\text{all}}\, g(y)\leqslant\delta<+\infty$$

dans la sphère (8.1) *c.-à-d. dans la sphère*

$$|y-b|<R\leqslant+\infty.$$

Dans ces hypothèses la fonction $\sigma(x)$ intervenant dans la thèse du théorème précédent jouit des propriétés supplémentaires suivantes

(8.6) $$\frac{1}{\delta}\leqslant\underline{\text{all}}\,\sigma(x)\quad \textit{dans la sphère } (8.1).$$

La transformation $x=g(y)$ est inversible (cf. § 7) *dans la sphère*

(8.7) $$|y-b|<\frac{\beta}{\delta}R,\quad \left(\mathrm{Sph}\left(b,\frac{\beta}{\delta}R\right)\right)$$

et l'image de cette sphère par l'intermédiaire de cette transformation englobe la sphère

(8.8) $$|x-a|<\frac{\beta^2}{\delta}R,\quad \left(\mathrm{Sph}\left(a,\frac{\beta^2}{\delta}R\right)\right).$$

Démonstration. Soit $x_0\in\mathrm{Sph}\,(a,R\beta)$ et soit $\{x_\nu\}$ une suite telle que

$$x_\nu\neq x_0,\quad x_\nu\in\mathrm{Sph}\,(a,R\beta),\quad x_\nu\to x_0,$$

(8.9) $$\frac{|\sigma(x_\nu)-\sigma(x_0)|}{|x_\nu-x_0|}\to\underline{\text{all}}\,\sigma(x_0).$$

On a en vertu de (8.4), (8.5) et du lemme 2 sur les accroissements finis

$$|x_\nu - x_0| = |g(\sigma(x_\nu)) - g(\sigma(x_0))| \leqslant \delta |\sigma(x_\nu) - \sigma(x_0)|$$

donc $\dfrac{|\sigma(x_\nu)-\sigma(x_0)|}{|x_\nu - x_0|} \geqslant \dfrac{1}{\delta}$. Cette relation rapprochée de (8.9) donne à la limite l'inégalité (8.6).

À la fonction $\sigma(x)$, envisagée dans la sphère Sph $(a, \beta R)$, on pourra appliquer le théorème 3. Il existera donc une fonction $h(y)$ continue dans la sphère Sph $\left(b, \frac{\beta}{\delta} R\right)$, c.-à-d. dans la sphère (8.7), telle que

(8.10) $$\sigma(h(y)) = y \quad \text{pour} \quad y \in \mathrm{Sph}\left(b, \frac{\beta}{\delta} R\right).$$

En posant $x = h(y)$ dans (8.4) on trouvera

$$h(y) = g(\sigma(h(y))) = g(y) \quad \text{lorsque} \quad y \in \mathrm{Sph}\left(b, \frac{\beta}{\delta} R\right)$$

donc en vertu de (8.10)

(8.11) $$\sigma(g(y)) = y \quad \text{dans} \quad \mathrm{Sph}\left(b, \frac{\beta}{\delta} R\right).$$

Soient $y_1 \neq y_2$ deux points de Sph $\left(b, \frac{\beta}{\delta} R\right)$. Afin de prouver que $g(y)$, envisagée dans Sph $\left(b, \frac{\beta}{\delta} R\right)$ est inversible il suffit de prouver que $g(y_1) \neq g(y_2)$.

Supposons, pour la démonstration par l'impossible, que $g(y_1) = g(y_2)$. En raison de (8.11) on aura

$$y_1 = \sigma(g(y_1)) = \sigma(g(y_2)) = y_2$$

contrairement à l'hypothèse que $y_1 \neq y_2$.

Afin de prouver que l'image de (8.7) par l'intermédiaire de g englobe la sphère (8.8), il suffit d'appliquer le théorème 3 (en y posant $\frac{\beta}{\delta} \cdot R$ au lieu de R) et de remarquer que la fonction $g(y)$ étant énvisagée dans Sph $\left(b, \frac{\beta}{\delta} R\right)$, la fonction $\sigma(x)$ vérifie la relation $x = g(\sigma(x))$ dans la sphère (8.8).

Cartesian Products of Boolean Algebras.

By

Roman Sikorski (Warszawa).

The definition of cartesian products of fields[1] of sets presents no difficulty.

For every $\tau \in T$[2] let $\boldsymbol{X}_\tau$ be a field of subsets of a set $\mathfrak{X}_\tau$. The *cartesian product* $\mathbf{P}^{\alpha}_{\tau\in T}\boldsymbol{X}_\tau$ of all fields $\boldsymbol{X}_\tau$ is the least field (of subsets of $\mathbf{P}_{\tau\in T}\mathfrak{X}_\tau$)[3] which contains all sets $\mathbf{P}_{\tau\in T}X_\tau$ where $X_\tau \in \boldsymbol{X}_\tau$ and the inequality $X_\tau \neq \mathfrak{X}_\tau$ holds only for a finite number of elements $\tau \in T$[4]. The *cartesian σ-product* $\mathbf{P}^{\beta}_{\tau\in T}\boldsymbol{X}_\tau$ of all fields $\boldsymbol{X}_\tau$ is the least σ-field (of subsets of $\mathbf{P}_{\tau\in T}\mathfrak{X}_\tau$) which contains the field $\mathbf{P}^{\alpha}_{\tau\in T}\boldsymbol{X}_\tau$[5].

The following two theorems[6] hold for the so-defined cartesian products:

0.1. *If for every $\tau \in T$, $\boldsymbol{X}_\tau$ and $\boldsymbol{Y}_\tau$ are isomorphic*[7] *fields of sets, then the cartesian products $\mathbf{P}^{\alpha}_{\tau\in T}\boldsymbol{X}_\tau$ and $\mathbf{P}^{\alpha}_{\tau\in T}\boldsymbol{Y}_\tau$ are also isomorphic.*

0.2. *If, for every $\tau \in T$, $\boldsymbol{X}_\tau$ and $\boldsymbol{Y}_\tau$ are isomorphic σ-fields*[8] *of sets, then the cartesian σ-products $\mathbf{P}^{\beta}_{\tau\in T}\boldsymbol{X}_\tau$ and $\mathbf{P}^{\beta}_{\tau\in T}\boldsymbol{Y}_\tau$ are also isomorphic.*

---

1) A class $\boldsymbol{X}$ of subsets of a set $\mathfrak{X}$ is called a *field* if $X_1, X_2 \in \boldsymbol{X}$ implies $X_1 + X_2 \in \boldsymbol{X}$ and $\mathfrak{X} - X_1 \in \boldsymbol{X}$. A field $\boldsymbol{X}$ is called a *σ-field* if $X_n \in \boldsymbol{X}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ implies $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots \in \boldsymbol{X}$.

2) T denotes always a fixed non-empty set.

3) $\mathbf{P}_{\tau\in T}X_\tau$ will denote always the set-theoretical cartesian product of sets X_τ $(\tau \in T)$.

4) For instance, if $\boldsymbol{X}_\tau$ is the field of all both open and closed subsets of a bicompact space $\mathfrak{X}_\tau$, then $\mathbf{P}^{\alpha}_{\tau\in T}\boldsymbol{X}_\tau$ is the field of all both open and closed subsets of the bicompact space $\mathbf{P}_{\tau\in T}\mathfrak{X}_\tau$.

5) For instance, if $\overline{\overline{T}} \leqslant \aleph_0$ and if $\boldsymbol{X}_\tau$ is the σ-field of all Borel subsets of a metric space $\mathfrak{X}_\tau$, then $\mathbf{P}^{\beta}_{\tau\in T}\boldsymbol{X}_\tau$ is the σ-field of all Borel subsets of the metric space $\mathbf{P}_{\tau\in T}\mathfrak{X}_\tau$.

6) Theorems 0.1 and 0.2 follow immediately from theorems II and 3 (i) in my paper [5].

7) The definition of isomorphisms and homomorphisms is given on p. 31.

8) The condition that $\boldsymbol{X}_\tau$ and $\boldsymbol{Y}_\tau$ are σ-fields is essential.