Posons maintenant $\varphi=\tau(\omega^*+\omega)$ et soit $\tau=\mu+\nu$ une décomposition de la famille F. Je dis que $\nu+\mu$ est un diviseur gauche de φ. En effet, on a évidemment

$$(\nu+\mu)(\omega^*+\omega)=...+\nu+\mu+\nu+\mu+\nu+\mu+...=(\mu+\nu)(\omega^*+\omega),$$

donc, vu que $\mu+\nu=\tau$,

$$(\nu+\mu)(\omega^*+\omega)=\varphi.$$

Vu la propriété de la famille F, on conclut que le type φ (qui est évidemment dénombrable) a $2^{\aleph_0}$ diviseurs gauches distincts.

Il est maintenant facile de donner un exemple d'un type ordinal dénombrable ayant $2^{\aleph_0}$ diviseurs gauches et $2^{\aleph_0}$ diviseurs droits: tel est évidemment le type $\varphi\eta$. Chaque diviseur gauche de ce type est en même temps son diviseur droit.

Il est enfin à remarquer qu'il n'existe aucun type ordinal ayant comme diviseurs *gauches* les types ω et ω^*.

L'équivalence par décomposition finie et la mesure extérieure des ensembles.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Désignons par R_m l'espace euclidien à $m\geqslant 1$ dimensions.

Théorème 1. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, et si E est un ensemble situé dans R_m, borné et de mesure extérieure (lebesguienne) m-dimensionnelle $m_e(E)>0$, il existe, pour tout nombre réel $\mu>m_e(E)$, un ensemble H dans R_m équivalent à E par décomposition finie et tel que $m_e(H)=\mu$.*

Lemme. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, tout ensemble E situé dans R_m et de mesure m-dimensionnelle non nulle est une somme de deux ensembles disjoints dont chacun est de mesure extérieure m-dimensionnelle égale à celle de l'ensemble E.*

Démonstration du lemme. Soit E un ensemble de mesure non nulle situé dans R_m. Il existe, comme on le sait, un ensemble G_δ, Γ, tel que $E\subset\Gamma$ et que $m_e(E)=m(\Gamma)$ (où $m(\Gamma)$ désigne la mesure lebesguienne m-dimensionnelle de l'ensemble Γ). Il résulte de $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω, $\{P_\xi\}_{\xi<\Omega}$, formée de tous les ensembles parfaits de mesure positive contenus dans Γ. Je dis que l'on a $\overline{\overline{P_\xi E}}>\aleph_0$ pour $\xi<\Omega$.

En effet, si l'on avait, pour un $\alpha<\Omega$, $\overline{\overline{P_\alpha E}}\leqslant\aleph_0$, on aurait:

$$m[(\Gamma-P_\alpha)+P_\alpha E]=m(\Gamma)-m(P_\alpha)+m(P_\alpha E)=m(\Gamma)-m(P_\alpha)<m(\Gamma),$$

donc, vu que $E\subset(\Gamma-P_\alpha)+P_\alpha E$, on aurait $m_e(E)<m(\Gamma)$, contrairement à l'égalité $m_e(E)=m(\Gamma)$.

Les ensembles $P_\alpha E$ sont donc indénombrables pour $\alpha<\Omega$. On peut donc définir par induction transfinie deux suites transfinies $\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{q_\xi\}_{\xi<\Omega}$ de points de E, telles que

$$p_\alpha\in P_\alpha,\ q_\alpha\in P_\alpha \text{ et } p_\alpha\neq p_\xi,\ p_\alpha\neq q_\xi,\ q_\alpha\neq p_\xi,\ q_\alpha\neq p_\alpha,\ q_\alpha\neq q_\xi \text{ pour } \xi<\alpha.$$

Soit $E_1=\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $E_2=\{q_\xi\}_{\xi<\Omega}$. On aura donc $E_1E_2=0$. Si l'on avait $m_e(E_1)<m_e(E)=m(\Gamma)$, on aurait $m_i(\Gamma-E_1)>0$ et il existerait un ensemble parfait P de mesure positive, tel que $P\subset\Gamma-E_1$; comme il en résulte que $P\subset\Gamma$, P serait un terme de la suite $\{P_\xi\}_{\xi<\Omega}$, soit $P=P_\alpha$, d'où $p_\alpha\in P_\alpha=P$ et, d'après $P\subset\Gamma-E_1$, p_α non $\in E_1$, contrairement à la définition de l'ensemble E_1. On a donc $m_e(E_1)\geqslant m_e(E)$ et, comme $E_1\subset E$, on trouve $m_e(E_1)=m_e(E)$. On démontre pareillement que $m_e(E_2)=m_e(E)$.

Les ensembles E_1 et $E-E_1\supset E_2$ donnent évidemment la décomposition désirée de l'ensemble E et notre lemme se trouve démontré.

Par une induction facile on en déduit le suivant

Corollaire. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, et si n est un nombre naturel et E un ensemble situé dans R_m et de mesure m-dimensionnelle non nulle, E est une somme de n ensembles disjoints dont chacun est de mesure extérieure m-dimensionnelle égale à celle de l'ensemble E* [1].

Démonstration du théorème 1. Admettons que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Soit E un ensemble situé dans R_m et tel que $0<m_e(E)<\mu$. Il existe donc un nombre naturel n tel que $nm_e(E)>\mu$. L'ensemble E étant borné, on peut admettre que la première coordonnée x de tout point de E est $\geqslant 0$ et $<b$ (où b est un nombre réel). Soit, pour $0\leqslant a\leqslant b$, E_a l'ensemble de tous les points de E dont la première coordonnée est $\leqslant a$. La fonction $f(a)=m_e(E_a)$ est évidemment continue dans l'intervalle $(0,b)$ et on a $f(0)=0$, $f(b)=m_e(E)$. D'après $m_e(E)<\mu$ $nm_e(E)>\mu$ on a $f(0)=0<\dfrac{\mu-m_e(E)}{n-1}<m_e(E)=f(b)$ et il existe un nombre réel a, tel que $f(a)=\dfrac{\mu-m_e(E)}{n-1}$, ce qui donne $(n-1)m_e(E_a)=$ $=\mu-m_e(E)$.

Or, d'après le corollaire de notre lemme, E_a est une somme de n ensembles disjoints, $E_a=H_1+H_2+\ldots+H_n$, tels que $m_e(H_k)=$ $=m_e(E_a)$ pour $k=1,2,\ldots,n$. Désignons par $H(c)$ la translation de l'ensemble H parallèle à l'axe des x de longueur c, et posons $H=(E-E_a)+H_1(b)+H_2(2b)+\ldots+H_n(nb)$. On aura évidemment $m_e(H)=m_e(E)-m_e(E_a)+\sum_{k=1}^{n}m_e(H_k(kb))=m_e(E)-m_e(E_a)+\sum_{k=1}^{n}m_e(H_k)=$ $=m_e(E)+(n-1)m_e(E_a)=\mu$. Or, on a les décompositions en $n+1$ ensembles disjoints et respectivement congruents:

$$E=(E-E_a)+H_1+H_2+\ldots+H_n \text{ et } H=(E-E_a)+H_1(b)+H_2(2b)+\ldots+H_n(nb).$$

[1] On peut démontrer que, dans notre colloraire, le nombre naturel n peut être remplacé par le nombre cardinal $2^{\aleph_0}$.

L'ensemble E est donc équivalent par décomposition en $n+1$ parties à l'ensemble H qui est de mesure extérieure μ. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Il est à remarquer que, suivant une idée exposée par N. Lusin dans sa note des C. R. Paris 198 (1934), p. 1673, on pourrait démontrer notre lemme sans faire appel à l'hypothèse du continu (mais alors la démonstration serait beaucoup plus difficile). Ainsi le théorème 1 peut être démontré sans faire appel à l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

Théorème 2. *E étant un ensemble mesurable situé sur la droite ou dans le plan, il n'existe aucun ensemble équivalent à E par décomposition finie dont la mesure extérieure soit plus petite que celle de E.*

Démonstration. Admettons que l'ensemble mesurable E situé sur la droite ou dans le plan est équivalent par décomposition finie à un ensemble H (situé dans le même espace), tel que $m_e(H)<m(E)$.

Il existe, comme on le sait, un ensemble mesurable (un G_δ) Γ, tel que $H\subset\Gamma$ et $m_e(H)=m(\Gamma)$. L'ensemble mesurable E est donc équivalent par décomposition finie à un sous-ensemble d'un ensemble mesurable de mesure plus petite que E. Or, c'est impossible.

En effet, S. Banach a démontré qu'il existe une fonction $\beta(E)$ — dite mesure de Banach — qui fait correspondre à tout ensemble linéaire (respectivement plan) borné un nombre réel (fini) $\beta(E)\geqslant 0$, de sorte que:

1° $\beta(E_1)=\beta(E_2)$ si les ensembles E_1 et E_2 sont congruents (c'est-à-dire superposables par translation ou rotation),

2° $\beta(E_1+E_2)=\beta(E_1)+\beta(E_2)$, si $E_1E_2=0$,

3° $\beta(E)=m(E)$ si l'ensemble E est mesurable au sens de Lebesgue [2].

On déduit facilement des propriétés 1° et 2° de la mesure de Banach que deux ensembles équivalents par décomposition finie ont la même mesure de Banach. Comme $H\subset\Gamma$, la mesure de Banach de H est non supérieure à celle de Γ, donc $\beta(H)\leqslant\beta(\Gamma)=m(\Gamma)<m(E)$, et d'autre part, H étant équivalent par décomposition finie à E, on a $\beta(H)=\beta(E)=m(E)$, ce qui implique une contradiction.

[2] Voir S. Banach, Fund. Math. **4** (1923), p. 30, théorème I et remarque, p. 31, et théorème III, p. 31.

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Théorème 3. *E étant un ensemble borné situé dans un espace euclidien à $m \geqslant 3$ dimensions tel que $m_e(E) > 0$, il existe pour tout nombre réel μ tel que $0 < \mu < m_e(E)$ un ensemble H (de même espace) qui est équivalent par décomposition finie à E et tel que $m_e(H) = \mu$.*

Démonstration. Vu le théorème 1, il suffira de démontrer que l'ensemble E est équivalent par décomposition finie à un ensemble de mesure extérieure $\leqslant \mu$. Soit Q un cube m-dimensionnel contenant E. D'après Banach et Tarski[3]), comme $m \geqslant 3$, Q équivaut par décomposition finie à un cube m-dimensionnel quelconque, donc, en particulier, à un cube K de mesure (m-dimensionnelle) μ. Comme $E \subset Q$, E équivaut par décomposition finie à une partie H de K et on a évidemment $m_e(H) \leqslant m(K) = \mu$.

Le théorème 3 est ainsi démontré.

Naturellement, dans un espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions un ensemble équivalent par décomposition finie à un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

[3]) Voir S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), p. 263, Théorème 24. Le théorème y est énoncé pour $m = 3$, mais sa généralisation pour le cas $m \geqslant 3$ n'offre pas de difficulté.

On a Topological Problem Connected with the Cantor-Bernstein Theorem.

By

Casimir Kuratowski (Warszawa).

The purpose of this paper is to define two closed and bounded sets A and B (on the euclidean plane) which are not homeomorphic, although each of them is homeomorphic to a relatively open subset of the other[1]).

1. ***Definition.*** Let us consider the doubly infinite sequence $p_m = 2^{(-2^{-m})}$:

$$\ldots, p_{-3} = \frac{1}{2^8}, \quad p_{-2} = \frac{1}{2^4}, \quad p_{-1} = \frac{1}{2^2}, \quad p_0 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \quad p_3 = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}, \ldots$$

Let M_n (where $n = 1, 2, \ldots$) denote the dendrite composed of the segment

$$S_n = \mathop{E}_{xy}\left(x = \frac{1}{n}\right)(0 \leqslant y \leqslant 1)$$

and of the sequence of small dendrites $D_0^n, D_1^n, \ldots$ such that

(i) $\mathop{\mathrm{Lim}}_{k=\infty} D_k^n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, (ii) $D_k^n \cdot D_m^n = 0$ (if $k \neq m$),

(iii) D_k^n is composed of $k+1$ segments having the point $\left(\frac{1}{n}, p_{k-n+1}\right)$ in common with S_n (this point being a point of M_n of order $k+3$),

(iv) $M_n \cdot M_m = 0$ if $n \neq m$.

[1]) A and B are 1-dimensional sets. The problem raised by Sikorski (Coll. Math. **1** (1947-48), p. 242) of defining two 0-dimensional sets A and B of that kind, is still unsolved.