Sur un type ordinal dénombrable qui a une infinité indénombrable de diviseurs gauches.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Il est facile à donner un exemple d'un type d'ordre dénombrable qui a une infinité de puissance du continu de diviseurs droits. Tel est, en effet, le type η, vu qu'on a pour tout type τ au plus dénombrable $\eta=\eta\tau$ et vu qu'il existe $2^{\aleph_0}$ types ordinaux dénombrables distincts. Le type η n'a cependant que 5 diviseurs gauches, notamment les types 1, η, $1+\eta$, $\eta+1$ et $1+\eta+1$.

Or, M. Mostowski a posé la question s'il existe un type d'ordre dénombrable qui a une infinité indénombrable de diviseurs gauches. Le but de cette Note est de donner un exemple d'un tel type.

Soit D un ensemble dense de segments fermés et disjoints, par exemple l'ensemble de tous les intervalles contigus à l'ensemble parfait non dense de Cantor. Soit $d_1, d_2, \ldots$ une suite infinie formée de tous les segments de l'ensemble D.

Plaçons, pour tout n naturel, dans le segment d_n, n points distincts (p. ex. ceux qui divisent d_n en $n+1$ parties égales): soit E_n leur ensemble et soit T l'ensemble-somme de tous les ensembles E_n (pour $n=1,2,\ldots$). Soit τ le type d'ordre de l'ensemble T ordonné d'après la grandeur des abscisses de ses points [1]).

Considérons des coupures de l'ensemble ordonné T déterminant des lacunes, c'est-à-dire des décompositions $T=M+N$ de T en une somme de deux ensembles, où M n'a pas d'élément dernier

[1]) On démontre sans peine que l'ensemble T contient un sous-ensemble de type $\omega^*+\omega$ et qu'il n'existe aucune transformation de similitude de l'ensemble T en lui-même qui ne soit pas l'identité. Cela résoût positivement un problème posé par M. Hartman. D'ailleurs les types $\omega^*\omega$ et $\omega\omega^*$ jouissent de la même propriété.

et N n'a pas d'élément premier et où chaque élément de M précède chaque élément de N. L'ensemble T étant dénombrable et contenant évidemment un sous-ensemble ordonné dense, on voit sans peine qu'il existe $2^{\aleph_0}$ coupures distinctes de T déterminant des lacunes. À toute coupure $T=M+N$ correspond évidemment une décomposition $\tau=\mu+\nu$ du type τ en une somme de deux types. Je dis que si les coupures $M+N$ et M_1+N_1 (déterminant des lacunes) sont distinctes et $\overline{M}=\mu$, $\overline{N}=\nu$, $\overline{M}_1=\mu_1$, $\overline{N}_1=\nu_1$, on a $\mu\neq\mu_1$ et $\nu\neq\nu_1$.

Appelons *portion* d'un ensemble ordonné H tout son sous-ensemble H_1 jouissant de cette propriété que si $a\in H_1$, $b\in H_1$, $x\in H$ et $a\prec x\prec b$, on a $x\in H_1$. Appelons les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de H *chaîne d'ordre* n, si $x_1\prec x_2\prec\ldots\prec x_n$, s'il n'existe entre x_1 et x_n aucun élément de H distinct de $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ et si l'ensemble des éléments de H précédant x_1 n'a pas d'élément dernier et l'ensemble des éléments de H suivant x_n n'a pas d'élément premier.

Supposons maintenant que les coupures $M+N$ et M_1+N_1 déterminant des lacunes sont distinctes, donc que $M\neq M_1$.

Un des ensembles M et M_1 est donc une partie aliquote de l'autre, par exemple M_1 de M, et on a évidemment $M=M_1+P$, où P est une portion infinie de M (puisque M n'a pas d'élément dernier), donc aussi une portion de T. Or, il résulte sans peine de la définition de l'ensemble T que toute portion infinie de T contient une infinité des ensembles de la suite $E_1, E_2, \ldots$ Si E_n est contenu dans P, donc dans M, M contient une chaîne d'ordre n. Or, comme on voit facilement, l'ensemble M_1 ne contient aucune chaîne de ce genre, vu qu'il ne contient que des ensembles E_k, où $k\neq n$. Par conséquent les ensembles M et M_1 ne peuvent pas être semblables. Pareillement on démontre que les ensembles N et N_1 ne sont pas semblables. On a ainsi $\mu\neq\mu_1$ et $\nu\neq\nu_1$, c. q. f. d.

Ajoutons qu'on a dans notre cas $\nu+\mu\neq\nu_1+\mu_1$. En effet, soit, comme auparavant $E_n\subset P$ et soit E_m un ensemble de la suite $E_1, E_2, \ldots$ contenu dans N. Comme $M=M_1+P$, d'où $N_1=P+N$, l'ensemble E_n précède E_m dans N_1, donc aussi dans N_1+M_1, et l'ensemble $E_n\subset M$ suit E_m dans $N+M$. Il en résulte sans peine que les types $\nu+\mu$ et $\nu_1+\mu_1$ sont distincts.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe une famille F de puissance $2^{\aleph_0}$ des décompositions du type τ en une somme de deux types $\tau=\mu+\nu$, telles que $\tau=\mu+\nu$ et $\tau=\mu_1+\nu_1$ étant deux décompositions distinctes de la famille F, on a $\nu+\mu\neq\nu_1+\mu_1$.

Posons maintenant $\varphi=\tau(\omega^*+\omega)$ et soit $\tau=\mu+\nu$ une décomposition de la famille F. Je dis que $\nu+\mu$ est un diviseur gauche de φ. En effet, on a évidemment

$$(\nu+\mu)(\omega^*+\omega)=\ldots+\nu+\mu+\nu+\mu+\nu+\mu+\ldots=(\mu+\nu)(\omega^*+\omega),$$

donc, vu que $\mu+\nu=\tau$,

$$(\nu+\mu)(\omega^*+\omega)=\varphi.$$

Vu la propriété de la famille F, on conclut que le type φ (qui est évidemment dénombrable) a $2^{\aleph_0}$ diviseurs gauches distincts.

Il est maintenant facile de donner un exemple d'un type ordinal dénombrable ayant $2^{\aleph_0}$ diviseurs gauches et $2^{\aleph_0}$ diviseurs droits: tel est évidemment le type $\varphi\eta$. Chaque diviseur gauche de ce type est en même temps son diviseur droit.

Il est enfin à remarquer qu'il n'existe aucun type ordinal ayant comme diviseurs *gauches* les types ω et ω^*.

L'équivalence par décomposition finie et la mesure extérieure des ensembles.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Désignons par R_m l'espace euclidien à $m\geqslant 1$ dimensions.

Théorème 1. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, et si E est un ensemble situé dans R_m, borné et de mesure extérieure (lebesguienne) m-dimensionnelle $m_e(E)>0$, il existe, pour tout nombre réel $\mu>m_e(E)$, un ensemble H dans R_m équivalent à E par décomposition finie et tel que $m_e(H)=\mu$.*

Lemme. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, tout ensemble E situé dans R_m et de mesure m-dimensionnelle non nulle est une somme de deux ensembles disjoints dont chacun est de mesure extérieure m-dimensionnelle égale à celle de l'ensemble E.*

Démonstration du lemme. Soit E un ensemble de mesure non nulle situé dans R_m. Il existe, comme on le sait, un ensemble G_δ, Γ, tel que $E\subset\Gamma$ et que $m_e(E)=m(\Gamma)$ (où $m(\Gamma)$ désigne la mesure lebesguienne m-dimensionnelle de l'ensemble Γ). Il résulte de $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω, $\{P_\xi\}_{\xi<\Omega}$, formée de tous les ensembles parfaits de mesure positive contenus dans Γ. Je dis que l'on a $\overline{\overline{P_\xi E}}>\aleph_0$ pour $\xi<\Omega$.

En effet, si l'on avait, pour un $\alpha<\Omega$, $\overline{\overline{P_\alpha E}}\leqslant\aleph_0$, on aurait:

$$m[(\Gamma-P_\alpha)+P_\alpha E]=m(\Gamma)-m(P_\alpha)+m(P_\alpha E)=m(\Gamma)-m(P_\alpha)<m(\Gamma),$$

donc, vu que $E\subset(\Gamma-P_\alpha)+P_\alpha E$, on aurait $m_e(E)<m(\Gamma)$, contrairement à l'égalité $m_e(E)=m(\Gamma)$.

Les ensembles $P_\alpha E$ sont donc indénombrables pour $\alpha<\Omega$. On peut donc définir par induction transfinie deux suites transfinies $\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{q_\xi\}_{\xi<\Omega}$ de points de E, telles que

$$p_\alpha\epsilon P_\alpha,\quad q_\alpha\epsilon P_\alpha\quad\text{et}\quad p_\alpha\neq p_\xi,\ p_\alpha\neq q_\xi,\ q_\alpha\neq p_\xi,\ q_\alpha\neq p_\alpha,\ q_\alpha\neq q_\xi\ \text{pour}\ \xi<\alpha.$$

Soit $E_1=\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $E_2=\{q_\xi\}_{\xi<\Omega}$. On aura donc $E_1E_2=0$. Si l'on avait $m_e(E_1)<m_e(E)=m(\Gamma)$, on aurait $m_i(\Gamma-E_1)>0$ et il exi-