The equalities (11-14) imply that $\Phi_{\beta}^{0}=[E(\beta)]$ for every formula β. The easy proof (by induction on the length of β) is omitted.

In particular $\Phi_{\alpha}^{0}=[E(\alpha)]=0 \epsilon B_0$ by (10), which proves $(\substack{*\\*})$.

8. ***Generalizations.*** By the same method Gödel's theorem can be proved for the functional calculus with the sign of equality $=$. The axioms of this systems are the axioms A 1-3 and

A 4. $x_k=x_k$.

A 5. $(x_k=x_l)\to\left(\alpha\to\alpha\binom{x_k}{x_l}\right)$.

The algebraic interpretation of the formula $x_k=x_l$ is $\psi(x_k,x_l)$ where $\psi \epsilon \mathfrak{F}^2$ is an (I,B_0) function defined by the conditions:

$$\psi(m,n)=1 \epsilon B_0 \quad \text{if} \quad m=n; \qquad \psi(m,n)=0 \epsilon B_0 \quad \text{if} \quad m\neq n.$$

A method similar to that of our proof may be used for the two-valued sentential calculus.

Note also that the condition that I is the set of all positive integers is not essential in sections 2, 3 and 4. I may be an arbitrary non-void abstract set.

Le dernier théorème de Fermat pour les nombres ordinaux.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le dernier théorème de Fermat n'est pas vrai pour les nombres ordinaux. En effet, on a le

Théorème 1. *Quel que soit le nombre ordinal μ, il existe trois nombres ordinaux distincts α,β et γ dont chacun est plus grand que μ et tels qu'on a*

$$\alpha^n+\beta^n=\gamma^n \quad \textit{pour} \quad n=1,2,3\ldots \tag{1}$$

Le théorème 1 est une conséquence immédiate de la formule

$$(\omega^{\xi})^n+(\omega^{\xi}\cdot 2)^n=(\omega^{\xi}\cdot 3)^n \tag{2}$$

qui, comme on le vérifie sans peine, est vraie pour tout nombre ordinal $\xi>0$ et pour tout nombre naturel n (pour le voir, il suffit de remarquer qu'on a pour tout nombre ordinal positif ξ et pour k et n naturels $(\omega^{\xi}k)^n=\omega^{\xi n}k$).

Les termes à gauche de la formule (2) sont commutables; si l'on voulait avoir des termes non commutables, on pourrait remplacer la formule (2) par la formule

$$(\Omega^{\xi}\omega)^n+(\Omega^{\xi})^n=(\Omega^{\xi}(\omega+1))^n$$

qui a lieu pour tout nombre ordinal $\xi>0$ et pour tout nombre naturel n.

Citons encore sans démonstration les solutions suivantes de l'équation (1) pour n naturel donné (où les nombres ordinaux α, β et γ dépendent de n et dont on ne peut pas déduire le théorème 1):

$$(\omega^{n+1})^n+(\omega^n)^n=(\omega^{n+1}+\omega)^n \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\ldots$$

et

$$[\lambda(\lambda+1)^{n-1}]^n+[(\lambda+1)^{n-1}]^n=[(\lambda+1)^n]^n$$

quel que soit le nombre naturel n et le nombre ordinal λ de deuxième espèce.

On démontre aussi facilement qu'*il existe pour tout nombre naturel n et pour tout nombre ordinal μ des nombres ordinaux α, β, γ satisfaisant à l'équation* (1), *dont chacun est plus grand que μ et tels que $\alpha=\beta$*. Cela résulte tout de suite de l'égalité

$$(\omega^{\xi})^n+(\omega^{\xi})^n=(\omega^{\xi}\cdot 2)^n$$

que l'on démontre sans peine pour tout nombre ordinal $\xi>0$ et pour tout n naturel.

Pareillement il est facile à démontrer qu'*il existe pour tout nombre naturel n et pour tout nombre ordinal μ des nombres ordinaux α, β, γ satisfaisant à l'équation* (1), *dont chacun est plus grand que μ et tels que $\beta=\gamma$*. C'est une conséquence immédiate de l'égalité

$$(\omega^{\xi})^n+(\omega^{\xi+1})^n=(\omega^{\xi+1})^n$$

qu'on a pour tout nombre ordinal $\xi\geqslant 0$ et pour tout n naturel.

Nous nous occuperons maintenant de l'équation

(3) $$\alpha^{\lambda}+\beta^{\lambda}=\gamma^{\lambda},$$

où λ est un nombre ordinal quelconque. On a ici le

Théorème 2. *λ étant un nombre ordinal de première espèce et μ un nombre ordinal quelconque, il existe des nombres ordinaux α, β, γ plus grands que μ, satisfaisant à l'équation* (3) *et tels que les nombres $\alpha^{\lambda}, \beta^{\lambda}$ et γ^{λ} sont distincts.*

Démonstration. En tant que nombre de première espèce, λ peut être présenté sous la forme $\lambda=\omega\zeta+n$, où ζ est un nombre ordinal $\geqslant 0$ et n est un nombre naturel.

En multipliant les deux côtés de l'égalité (2) à gauche par $\omega^{\xi\omega\zeta}$ et vu qu'on a pour $\xi>0$ et $\zeta\geqslant 0$ ordinaux et pour k et n naturels $(\omega^{\xi}k)^{\omega\zeta+n}=\omega^{\xi\omega\zeta}(\omega^{\xi}k)^n$, on trouve

$$(\omega^{\xi})^{\omega\zeta+n}+(\omega^{\xi}\cdot 2)^{\omega\zeta+n}=(\omega^{\xi}\cdot 3)^{\omega\zeta+n}.$$

Il en résulte encore plus que le théorème 2, à savoir la proposition suivante:

μ étant un nombre ordinal quelconque, il existe des nombres ordinaux α, β, γ plus grands que μ et tels qu'on a pour tout nombre ordinal λ de première espèce l'égalité (3) *et que les nombres α^{λ}, β^{λ} et γ^{λ} sont distincts.*

Or, nous prouverons qu'*il n'existe aucun système de trois nombres ordinaux α, β, γ plus grands que* 1 *et tels qu'on ait pour tout nombre ordinal λ de deuxième espèce l'égalité* (3).

En effet, soit ε un nombre epsilonien, donc tel que $\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$. Soit ξ un nombre ordinal tel que $\xi<\varepsilon$. On a donc $\xi<\omega^{\varepsilon}$ et il existe un nombre ordinal positif $\nu<\varepsilon$, tel que $\xi<\omega^{\nu}$, d'où $\varepsilon\leqslant\xi+\varepsilon\leqslant\omega^{\nu}+\omega^{\varepsilon}=\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$, donc $\xi+\varepsilon=\varepsilon$ et, comme $\nu<\varepsilon$, aussi $\nu+\varepsilon=\varepsilon$, d'où $\varepsilon\leqslant\nu\varepsilon\leqslant\omega^{\nu}\cdot\omega^{\varepsilon}=\omega^{\nu+\varepsilon}=\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$, ce qui donne $\nu\varepsilon=\varepsilon$ et $\xi^{\varepsilon}\leqslant(\omega^{\nu})^{\varepsilon}=\omega^{\nu\varepsilon}=\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$, d'où

(4) $$\xi^{\varepsilon}\leqslant\varepsilon \quad \text{pour tout nombre ordinal} \quad \xi<\varepsilon.$$

Si l'on admet que $\xi>1$, on a $\xi^{\varepsilon}\geqslant 2^{\varepsilon}$ et, comme $\omega\varepsilon=\varepsilon$ et $2^{\varepsilon}=2^{\omega\varepsilon}=(2^{\omega})^{\varepsilon}=\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$, on trouve $\xi^{\varepsilon}\geqslant\varepsilon$ pour $\xi>1$, et la formule (4) donne

(5) $$\xi^{\varepsilon}=\varepsilon \quad \text{pour} \quad 1<\xi<\varepsilon.$$

Soient maintenant α, β, et γ trois nombres ordinaux plus grands que 1. Il existe, comme on sait, un nombre epsilonien ε plus grand que α, β et γ. On aura donc, d'après (5): $\alpha^{\varepsilon}=\beta^{\varepsilon}=\gamma^{\varepsilon}=\varepsilon$, d'où

$$\alpha^{\varepsilon}+\beta^{\varepsilon}>\gamma^{\varepsilon}.$$

Notre assertion se trouve ainsi démontrée.

Pour les nombres ordinaux λ de deuxième espèce on a le

Théorème 3. *Il existe trois nombres ordinaux positifs distincts α, β et γ satisfaisant pour tout nombre ordinal transfini λ de deuxième espèce à l'équation* (3).

Le théorème 3 est une conséquence immédiate de la formule

(6) $$1^{\lambda}+2^{\lambda}=3^{\lambda}$$

qui a lieu pour tout nombre transfini λ de deuxième espèce (comme il résulte tout de suite de l'égalité $2^{\omega}=3^{\omega}=\omega$).

Théorème 4. *λ étant un nombre ordinal transfini de deuxième espèce et μ un nombre ordinal quelconque, il existe trois nombres ordinaux distincts α, β, γ plus grands que μ et satisfaisant à l'équation* (3).

Le théorème 4 résulte tout de suite de l'égalité

$$(\omega^{\xi})^{\lambda}+(\omega^{\xi\lambda})^{\lambda}=(\omega^{\xi\lambda}+1)^{\lambda}$$

qui, comme on le vérifie facilement, a lieu pour tout nombre ordinal positif ξ et pour tout nombre ordinal transfini λ de deuxième espèce.

Nous démontrerons encore le

Théorème 5. *Si λ est un nombre ordinal transfini de deuxième espèce et α, β et γ sont trois nombres ordinaux positifs satisfaisant à l'équation* (3), *on a $\beta^{\lambda}=\gamma^{\lambda}$.*

Démonstration. Soient α, β et γ trois nombres ordinaux positifs satisfaisant à l'équation (3), où λ est un nombre ordinal transfini donné de deuxième espèce. On a donc $\gamma > 1$ et, λ étant un nombre transfini de deuxième espèce, γ^λ est, comme on le sait, une puissance du nombre ω dont l'exposant est positif et par suite le nombre γ^λ n'a pas de restes positifs autres que lui-même. Il résulte donc de l'égalité (3) et de l'hypothèse que $\beta > 0$, donc $\beta^\lambda > 0$, qu'on a $\beta^\lambda = \gamma^\lambda$, c. q. f. d.

Nous examinerons encore, quels sont les exposants transfinis λ pour lesquels l'équation (3) a des solutions en nombres naturels distincts α, β et γ. C'est le cas pour les nombres ordinaux transfinis λ de deuxième espèce, comme le prouve la formule (5).

Supposons maintenant que λ est un nombre ordinal transfini de première espèce, $\lambda = \omega\xi + n$, où ξ est un nombre ordinal > 0 et n un nombre naturel, et admettons que les nombres naturels distincts p, q et r satisfassent à l'équation

$$p^\lambda + q^\lambda = r^\lambda. \tag{7}$$

S'il était $p = 1$, donc $q > 1$ et $r > 1$, on aurait d'après (7), vu que $k^\lambda = k^{\omega\xi + n} = \omega^\xi k^n$, pour k naturels >1: $1 + \omega^\xi q^n = \omega^\xi r^n$, et comme $1 + \omega^\xi q^n = \omega^\xi q^n$, on trouverait $\omega^\xi q^n = \omega^\xi r^n$, d'où $q = r$, contrairement à l'hypothèse que les nombres p, q et r sont distincts.

S'il était $q = 1$, $p > 1$, $r > 1$, on aurait $\omega^\xi p^n + 1 = \omega^\xi r^n$, ce qui est impossible, le côté gauche de cette égalité étant un nombre de première espèce et le côté droit — un nombre de deuxième espèce.

Les nombres p, q et r sont donc tous plus grands que 1 et on a $p^\lambda = \omega^\xi p^n$, $q^\lambda = \omega^\xi q^n$ et $r^\lambda = \omega^\xi r^n$, donc d'après (7) et la loi distributive

$$\omega^\xi (p^n + q^n) = \omega^\xi p^n + \omega^\xi q^n = \omega^\xi r^n,$$

ce qui donne $p^n + q^n = r^n$.

Il en résulte tout de suite le

Théorème 6. *Si λ est un nombre ordinal transfini de deuxième espèce l'équation* (3) *a des solutions en nombres naturels distincts α, β, γ. Si λ est un nombre ordinal de première espèce, $\lambda = \omega\xi + n$, où n est un nombre naturel, l'équation* (3) *a des solutions en nombres naturels distincts α, β, γ dans ce cas (et seulement dans ce cas), où l'équation* (1) *a des solutions en nombres naturels α, β, γ.*

En particulier ce sera donc le cas pour $n = 1$ et pour $n = 2$. En effet, on a pour les nombres transfinis ξ quelconques:

$$2^{\omega\xi+1} + 3^{\omega\xi+1} = 5^{\omega\xi+1}$$

et

$$3^{\omega\xi+2} + 4^{\omega\xi+2} = 5^{\omega\xi+2}.$$

Il est enfin à remarquer qu'on a pour tous les nombres ordinaux λ transfinis

$$1^\lambda + 2^\lambda = 2^\lambda.$$

Quelques mots encore à propos d'une autre proposition fameuse, à savoir de l'hypothèse de Goldbach. Elle n'est pas vraie pour les nombres transfinis. On peut démontrer que le plus petit nombre ordinal transfini pair qui n'est pas une somme de deux nombres ordinaux premiers, est $\omega + 10$ et que le plus petit nombre ordinal > 1 qui n'est pas une somme d'un nombre fini de nombres ordinaux premiers, est ω^2.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État