Sur un ensemble plan singulier.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *E étant un ensemble linéaire, il existe au plus un point p de E tel que $E-\{p\}\simeq E$* ($A\simeq B$ désigne que les ensembles A et B sont superposables par translation ou par rotation).

Théorème 2. *Il existe un ensemble plan E contenant deux points distincts p et q tels que $E-\{p\}\simeq E$ et $E-\{q\}\simeq E$.*

Démonstration du théorème 1. Soit E un ensemble linéaire et admettons qu'il contient deux points distincts p et q tels que $E-\{p\}\simeq E$ et $E-\{q\}\simeq E$.

Je dis que l'ensemble $E-\{p\}$ ne peut pas être superposable avec E par rotation (de la droite sur laquelle il est situé de l'angle π autour d'un point quelconque de cette droite). En effet, soit φ la rotation qui transforme l'ensemble E en l'ensemble $E-\{p\}$; c'est-à-dire $\varphi(E)=E-\{p\}$. Soit $p'=\varphi(p)$; on a donc $p'\in E-\{p\}$, donc $p'\in E$ et $\varphi(p')\in\varphi(E)=E-\{p\}$, d'où $\varphi(p')\neq p$, ce qui est impossible, puisque évidemment $\varphi(p')=\varphi\varphi(p)=p$.

L'ensemble $E-\{p\}$ est donc superposable avec E par translation, et il est de même pour l'ensemble $E-\{q\}$. Il existe par conséquent deux nombres réels a et b tels que $E-\{p\}=E(a)$ et $E-\{q\}=E(b)$, où $E(c)$ désigne la translation d'une longueur c de l'ensemble E (le long de la droite), c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres $x+c$, où $x\in E$. Comme $p\in E$, d'où $E\neq E-\{p\}$, on a $a\neq 0$. Comme $q\neq p$, on a $q\in E-\{p\}$, donc $q\in E(a)$, d'où $q-a\in E$. Comme $a\neq 0$, on a $q-a\neq q$, donc $q-a\in E-\{q\}$, c'est-à-dire $q-a\in E(b)$, d'où $q-a-b\in E$ et $q-b\in E(a)$ et, comme $E(a)\subset E$, on trouve $q-b\in E$, d'où $q\in E(b)=E-\{q\}$, ce qui est impossible.

L'hypothèse qu'on a $p\in E$, $q\in E$ et $E-\{p\}\simeq E\simeq E-\{p\}$ implique donc une contradiction et le théorème 1 se trouve démontré.

Corollaire. *E étant un ensemble linéaire non vide, il existe un point p de E tel que les ensembles E et $E-\{p\}$ ne sont pas superposables.*

Démonstration. Le corollaire est évident pour les ensembles contenant un seul point. Si E contient deux points distincts p et q, on conclut d'après le théorème 1 qu'un au moins des ensembles $E-\{p\}$ et $E-\{q\}$ n'est pas superposable avec E.

Démonstration du théorème 2. Soit $\alpha=e^i$ et soit $\beta=e^{\vartheta i}$ un nombre complexe à module 1 qui est algébriquement indépendant du nombre α. Soit c un nombre complexe qui n'est pas une fonction rationnelle aux coefficients rationnels de α et β.

Soit φ la rotation du plan de l'angle$=1$ autour du point 0 et soit ψ la rotation du plan de l'angle$=\vartheta$ autour du point c; on a donc, pour z complexes: $\varphi(z)=\alpha z$ et $\psi(z)=(z-c)\beta+c$.

Posons, pour z complexes: $\varphi^0(z)=\psi^0(z)=z$ et désignons par φ^{-1} et ψ^{-1} les rotations inverses par rapport à φ et ψ.

Soit E le plus petit ensemble plan tel que:

(1) $$0 \in E \text{ et } 1 \in E,$$
(2) $$\text{si } z \in E, \text{ on a } \varphi(z) \in E \text{ et } \psi(z) \in E,$$
(3) $$\text{si } z \in E \text{ et } z \neq 1, \text{ on a } \varphi^{-1}(z) \in E,$$
(4) $$\text{si } z \in E \text{ et } z \neq 0, \text{ on a } \psi^{-1}(z) \in E.$$

Je dis que

(5) $$\varphi(E)=E-\{1\} \quad \text{et} \quad \psi(E)=E-\{0\}.$$

En effet, d'après (2) on a $\varphi(E)\subset E$ et $\psi(E)\subset E$. Soit $z \in E-\{1\}$ et posons $z_1=\varphi^{-1}(z)$. Comme $z\neq 1$, on a $z_1 \in E$ d'après (3). Or, on a évidemment $z=\varphi(z_1) \in \varphi(E)$. Il est ainsi démontré que $E-\{1\}\subset\varphi(E)$. On démontre pareillement que $E-\{0\}\subset\psi(E)$.

Pour prouver la formule (5), il suffira donc de démontrer que $1 \text{ non} \in \varphi(E)$ et $0 \text{ non} \in \psi(E)$.

Soit H l'ensemble de tous les nombres complexes ayant l'une des 6 formes suivantes:

1) $\varphi^{n-1}(1)$, où $n=1,2,\ldots$,
2) $\psi^{n-1}(0)$, où $n=1,2,\ldots$,
3) $\varphi^{l_{2s}}\psi^{l_{2s-1}}\varphi^{l_{2s-2}}\ldots\psi^{l_3}\varphi^{l_2}\psi^{l_1}\varphi^{n-1}(1)$,
4) $\psi^{l_{2s-1}}\varphi^{l_{2s-2}}\psi^{l_{2s-3}}\ldots\varphi^{l_2}\psi^{l_1}\varphi^{n-1}(1)$,
5) $\psi^{l_{2s}}\varphi^{l_{2s-1}}\psi^{l_{2s-2}}\ldots\varphi^{l_3}\psi^{l_2}\varphi^{l_1}\psi^{n-1}(0)$,
6) $\varphi^{l_{2s-1}}\psi^{l_{2s-2}}\varphi^{l_{2s-3}}\ldots\psi^{l_2}\varphi^{l_1}\psi^{n-1}(0)$,

où s est un nombre naturel et $l_1,l_2,\ldots,l_{2s}$ sont des entiers positifs ou négatifs.

On vérifie sans peine que les conditions (1)—(4) sont remplies si l'on y remplace l'ensemble E par H. Vu la définition de l'ensemble E, on a donc $E\subset H$.

Admettons que $1 \in \varphi(E)$. On a donc $1=\varphi(z)$, où $z \in E$, donc aussi $z \in H$. Le nombre z a par conséquent une des formes 1)—6).

Si z est un nombre de la forme 1), on a pour un n naturel: $z=\varphi^{n-1}(1)$, d'où $1=\varphi(z)=\varphi^n(1)$, c'est-à-dire $\alpha^n=1$, ce qui est impossible, le nombre $\alpha=e^i$ étant transcendant.

Si z est un nombre de la forme 2), on a, pour un n naturel, $z=\psi^{n-1}(0)=-c\beta^{n-1}+c$, d'où $1=\varphi(z)=c(1-\beta^{n-1})\alpha$ et, c n'étant pas une fonction rationnelle (aux coefficients rationnels) de α et β cela est impossible.

Si z est un nombre de la forme 3), on a

$$\varphi^{l_{2s}+1}\psi^{l_{2s-1}}\varphi^{l_{2s-2}}\ldots\psi^{l_3}\varphi^{l_2}\psi^{l_1}\varphi^{n-1}(1)=1,$$

c'est-à-dire

$$(\ldots(((\alpha^{n-1}-c)\beta^{l_1}+c)\alpha^{l_2}-c)\beta^{l_3}\ldots+c)\alpha^{l_{2s-2}}-c)\beta^{l_{2s-1}}+c)\alpha^{l_{2s}+1}=1.$$

Le nombre c n'étant pas une fonction rationnelle (aux coefficients rationnels) de α et β, le coefficient de c à gauche doit être$=0$, c'est-à-dire, vu que $\alpha^{l_{2s}+1}\neq 0$, on a

$$(\ldots(((-\beta^{l_1}+1)\alpha^{l_2}-1)\beta^{l_3}\ldots+1)\alpha^{l_{2s-2}}-1)\beta^{l_{2s-1}}+1=0.$$

Le nombre β étant algébriquement indépendant du nombre α et vu que $l_{2s-1}\neq 0$, on trouve

$$(\ldots(((-\beta^{l_1}+1)\alpha^{l_2}-1)\beta^{l_3}\ldots+1)\alpha^{l_{2s-2}}-1=0.$$

Le nombre α étant algébriquement indépendant du nombre β et vu que $l_{2s-2}\neq 0$, on trouve ensuite

$$(\ldots(((-\beta^{l_1}+1)\alpha^{l_2}-1)\beta^{l_3}\ldots-1)\beta^{l_{2s-3}}+1=0,$$

et ainsi de suite, enfin

$$-\beta^{l_1}+1=0,$$

ce qui est impossible, vu que $l_1\neq 0$.

Le cas où z est un nombre de la forme 4) est traité d'une façon analogue.

Si z est un nombre de la forme 5), on a

$$\varphi\psi^{l_{2s}}\varphi^{l_{2s-1}}\psi^{l_{2s-2}}\ldots\varphi^{l_3}\psi^{l_2}\varphi^{l_1}\psi^{n-1}(0)=1,$$

c'est-à-dire

$$(\ldots(((-c\beta^{n-1}+c)\alpha^{l_1}-c)\beta^{l_2}+c)\alpha^{l_3}-\ldots+c)\alpha^{l_{2s-1}}-c)\beta^{l_{2s}}+c)\alpha=1.$$

Le nombre c n'étant pas une fonction rationnelle (aux coefficients rationnels) de α et β, on conclut que le coefficient de c à gauche doit être nul, mais alors le côté gauche de notre formule est nul, ce qui est impossible, le côté droit étant $=1$.

On traite le cas où z est un nombre de la forme 6) d'une façon tout à fait analogue.

Il est ainsi démontré que 1 non $\epsilon\, \varphi(E)$.

On démontre pareillement que 0 non $\epsilon\, \psi(E)$ (en prouvant que l'égalité $\psi(z)=0$ est impossible dans chacun des cas 1)—6) pour le nombre z).

La formule (5) est ainsi établie et il en résulte que les ensembles $E-\{1\}$ et $E-\{0\}$ sont superposables avec E. Le théorème 2 se trouve démontré.

Le problème suivant reste ouvert: existe-t-il un ensemble E non vide plan (ou situé dans l'espace à 3 dimensions) tel que $E-\{p\}\simeq E$ quel que soit le point p de E?

Or, il existe dans l'espace de Hilbert un ensemble dénombrable E tel que, quel que soit le point p de E, l'ensemble $E-\{p\}$ est congruent (c'est-à-dire isométrique) avec E. Tel est par exemple l'ensemble E de tous les points de l'espace de Hilbert dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une seule (d'ailleurs quelconque) qui est $=1$.

Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites dans le cas des espaces abstraits[1]).

Par

Tadeusz Ważewski (Kraków).

§ 1. Considérons le système d'équations

$$f^i(x_1,\ldots,x_p,\, y_1,\ldots,y_n)=0, \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

les fonctions f^i étant de classe C^1 dans un ensemble ouvert Ω (c.-à-d. possédant les dérivées partielles du premier ordre continues dans Ω). Supposons que le système (1.1) soit rempli par le point

$$x_\alpha=\overline{x}_\alpha, \quad y_j=\overline{y}_j, \qquad (\alpha=1,\ldots,p;\; j=1,\ldots,n). \tag{1.2}$$

Si en ce point le jacobien Dét $(f^i_{y_j})$ ne s'annule pas, alors, en vertu d'un théorème classique, il existe un système de fonctions implicites

$$y_i=\sigma^i(x_1,\ldots,x_p); \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.3}$$

qui sont de classe C^1 dans un voisinage V du point (1.2) et y remplissent identiquement les équations

$$f^i(x_1,\ldots,x_p,\sigma^1(x_1,\ldots,x_p),\ldots,\sigma^n)=0.$$

Les systèmes (1.1) et (1.3) sont équivalents dans un voisinage suffisamment petit du point (1.2).

Le théorème classique mentionné a un caractère local, car il ne donne aucun renseignement sur la grandeur du rayon r du voisinage V.

Certaines applications (p. ex. à la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles) nécessitent l'évaluation du rayon r.

---

[1]) Communiqué le 2. VI. 1946 à la Section de Cracovie de la Société Polonaise de Math. — sans le Théorème 1 du § 4, et, avec ce théorème, le 13.XII.1946 au Congrès des Mathématiciens Polonais.