Théorème 4. *Φ étant une famille croissante d'ensembles clairsemés situés dans un espace métrique quelconque, la somme S de tous les ensembles de la famille Φ est un ensemble F_σ.*

Démonstration. Distinguons deux cas, comme dans la démonstration du théorème 1. Dans le cas 1), S est un ensemble F_σ, puisque, comme on sait, tout ensemble clairsené est un F_σ[1]).

Dans le cas 2), S est un ensemble clairsemé. En effet, tout d'abord, comme dans la démonstration du théorème 1, on voit que $E_1, E_2, \dots$ étant une suite infinie quelconque d'ensembles de Φ, il existe un ensemble E de Φ, tel que $E_n \subset E$ pour $n=1,2,\dots$

Admettons maintenant que l'ensemble S n'est pas clairsemé; il contient donc un sous-ensemble (non vide) dense en soi. Or, comme on sait, tout ensemble dense en soi contient un sous-ensemble dense en soi dénombrable; il existe donc un sous-ensemble D de S, dense en soi et dénombrable. Soit $D=\{p_1, p_2, \dots\}$. Comme $p_n \epsilon S$, il existe un ensemble E_n de Φ tel que $p_n \epsilon E_n$. Or, comme nous avons vu, il existe (dans notre cas) un ensemble E de Φ tel que $E_n \subset E$ pour $n=1,2,\dots$, et on a $D \subset E$. Or, c'est impossible, E (en tant qu'ensemble de la famille Φ) étant clairsemé et D étant dense en soi.

Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) Cela peut être démontré comme il suit. E étant un ensemble quelconque contenu dans un espace métrique, désignons par E_1 l'ensemble de tous les points de E dans lesquels E n'est pas un F_σ. Je dis que E_1 n'a pas des points isolés. En effet, admettons que p_0 soit un point isolé de E_1. Il existe donc une sphère K au centre p_0 et telle que $E_1K-\{p_0\}=0$, et on a $EK-\{p_0\} \subset (E-E_1)K$, d'où on conclut que l'ensemble $EK-\{p_0\}$ est localement (c.-à-d. en chaque point) un F_σ; d'après un théorème de M. D. Montgomery (Fund. Math. **25**, p. 530) il en résulte que l'ensemble $EK-\{p_0\}$, donc aussi l'ensemble EK, est un F_σ, contrairement à l'hypothèse que $p_0 \epsilon E_1$.

Si E est un ensemble clairsemé, l'ensemble E_1 (en tant que dépourvu de points isolés) est nécessairement vide; l'ensemble E est donc localement un F_σ, d'où on conclut, d'après le théorème cité de M. Montgomery, que E est un F_σ, c. q. f. d.

Sur l'opération $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, \Phi(x,y)$ [1]).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

M. N. Lusin a démontré dans son livre connu[2]) l'existence d'une fonction de classe 2 de Baire de deux variables réelles, $\Phi(x,y)$, telle que la fonction (d'une variable réelle x)

$$f(x) = \overline{\lim_{y=+\infty}}\, \Phi(x,y) \tag{1}$$

(où $\overline{\lim}\, \Phi$ désigne l'opération de Cauchy-Hadamard qui consiste à prendre la plus grande limite d'une fonction) est non mesurable B.

Le but de cette Note est de faire quelques remarques à propos de ce résultat.

En premier lieu je prouverai qu'on ne peut remplacer dans la proposition de M. Lusin la classe 2 par la classe 1. En effet, je démontrerai le

Théorème 1. *Si $\Phi(x,y)$ est une fonction de classe $\leqslant 1$ de deux variables réelles, la fonction* (1) *est de classe $\leqslant 3$* [3]).

Ensuite je démontrerai le

Théorème 2. *Si $\Phi(x,y)$ est une fonction de Baire de deux variables réelles, la fonction* (1) *est mesurable L.*

Je déduirai le théorème 2 d'une proposition plus générale concernant certaines familles de fonctions de plusieurs variables réelles.

[1]) Le résumé de cette Note fut publié dans les Acta Pontif. Acad. Scientiarum Vol. IV, 1940, p. 203-204.

[2]) *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, pp. 318-319.

[3]) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1935, pp. 273-274.

Or, je démontrerai qu'*il existe des fonctions de Baire de classe 2 de trois variables réelles $\Phi(x,y,z)$, telles qu'il manque aujourd'hui complètement de méthode pour décider si la fonction* (d'une variable réelle)

$$f(x)=\lim_{z=+\infty}\overline{\lim_{y=+\infty}}\,\Phi(x,y,z) \tag{2}$$

est mesurable L ou non.

Démonstration du théorème 1. Désignons, pour x réel et n naturel donnés, par $f_n(x)$ le nombre $\sup\limits_{y\geqslant n}\Phi(x,y)$, c.-à-d. la borne supérieure de l'ensemble de tous les nombres $\Phi(x,y)$ où $y\geqslant n$. On vérifie sans peine, pour a réels donnés, la formule

$$\underset{x}{E}\,[f_n(x)>a]=\sum_{y}\underset{x,y}{E}\,[\Phi(x,y)>a,\ y\geqslant n]. \tag{3}$$

Si $\Phi(x,y)$ est une fonction de classe $\leqslant 1$, l'ensemble

$$\underset{x,y}{E}\,[\Phi(x,y)>a],$$

et par suite l'ensemble

$$\underset{x,y}{E}\,[\Phi(x,y)>a,\ y\geqslant n]=\underset{x,y}{E}\,[\Phi(x,y)>a]\cdot\underset{x,y}{E}\,[y\geqslant n]$$

est un F_σ (plan), et la formule (3) prouve que l'ensemble (linéaire) $\underset{x}{E}\,[f_n(x)>a]$ (en tant que projection d'un F_σ plan) est un F_σ. La fonction $f_n(x)$ est donc de classe $\leqslant 2$ (pour $n=1,2,\ldots$).

Or, d'après (1) et la définition de $f_n(x)$, on a évidemment (pour x réels)

$$f(x)=\lim_{n=\infty}f_n(x); \tag{4}$$

la fonction $f(x)$ est donc de classe $\leqslant 3$ et le théorème 1 est démontré.

$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ étant une fonction réelle de m variables réelles, nous dirons qu'elle est une fonction P_n, si, quel que soit le nombre réel a, l'ensemble

$$\underset{x_1,x_2,\ldots,x_m}{E}\,[f(x_1,x_2,\ldots,x_m)>a] \tag{5}$$

est un ensemble (projectif) P_n dans l'espace R_m à m dimensions [4].

[4]) Pour la définition des ensembles P_n voir p. e. Fund. Math. **13**, p. 238.

Lemme 1. *Si les fonctions $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ sont des fonctions P_n pour $k=1.2,\ldots$, et si*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\lim_{k=\infty}f_k(x_1,x_2,\ldots,x_m) \tag{6}$$

pour tout point $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ de R_m, la fonction $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ est également une fonction P_n.

Démonstration. D'après (6) on vérifie sans peine, pour a réels, la formule

$$\underset{x_1,x_2,\ldots,x_m}{E}\,[f(x,x_2,\ldots,x_m)>a]=\sum_{p=1}^{\infty}\prod_{k=p}^{\infty}\underset{x_1,x_2,\ldots,x_m}{E}\left[f_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)>a+\frac{1}{p}\right]. \tag{7}$$

Les fonctions $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ étant des fonctions P_n, les ensembles $\underset{x_1,x_2,\ldots,x_m}{E}\left[f_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)>a+\frac{1}{p}\right]$ sont, pour k et p naturels, des ensembles P_n. Or, la somme et le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles P_n étant, comme on le sait, un ensemble P_n, la formule (7) prouve que les ensembles (5) sont des P_n et la fonction $f(x,x_2,\ldots,x_m)$ est une fonction P_n, c. q. f. d.

Lemme 2. *Si $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ est une fonction P_n, la fonction*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})=\overline{\lim_{x_m=+\infty}}\,\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_m) \tag{8}$$

est une fonction P_n [5]).

Démonstration. Posons, pour k naturels

$$f_k(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})=\sup_{x_m\geqslant k}\Phi(x_1,\ldots,x_m); \tag{9}$$

d'après (8) on trouve

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})=\lim_{k=\infty}f_k(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1}). \tag{10}$$

Soit maintenant a un nombre réel donné. D'après (9) on vérifie sans peine pour $k=1,2,\ldots$ la formule

$$\underset{x_1,\ldots,x_m}{E}\,[f_k(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})>a]=\sum_{x_m}\underset{x_1,\ldots,x_m}{E}\,[\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_m)>a,\ x_m\geqslant k]. \tag{11}$$

[5]) Cf. C. Kuratowski, *Topologie I* (Monografie Matematyczne t. III), Warszawa-Lwów 1933, p. 267, ligne 1.

Or, $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ étant une fonction P_n, l'ensemble

$$\underset{x_1, x_2, \ldots, x_m}{E} [\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m) > a,\ x_m \geqslant k]$$

est (pour k naturel donné) un P_n, ainsi que sa projection (11). Les fonctions $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ sont donc des fonctions P_n pour $k = 1, 2, \ldots$, et il résulte de la formule (10) et du lemme 1 que $f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ est une fonction P_n, c. q. f. d.

Il résulte tout de suite des lemmes 1 et 2 le

Théorème 3. *Quel que soit le nombre naturel n, les fonctions obtenues des fonctions P_n (d'un nombre fini quelconque de variables réelles) par l'application d'un nombre fini de fois* (dans n'importe quel ordre) *des opérations* $\lim\limits_{k}$ *et* $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$, *sont des fonctions P_n.*

La phrase de M. Lusin (l. c., p. 320, lignes 8 et 9) qu'„on peut écrire de cette manière toutes les fonctions projectives" en partant des polynômes, qui semble être en contradiction avec le théorème 3, doit être conçue dans ce sens qu'il faut appliquer (un nombre fini de fois) non seulement les opérations $\lim\limits_{k}$ et $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$, mais aussi l'opération $\underline{\lim\limits_{y=+\infty}}$. Cette dernière se réduit d'ailleurs à l'opération $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$ par la formule $\underline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, \Phi = -\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, (-\Phi)$, mais il est à remarquer que si Φ est une fonction P_n, $-\Phi$ peut ne pas l'être.

Les fonctions de Baire (en tant que mesurables B) étant des fonctions P_1, et les ensembles P_1 (comme analytiques) étant mesurables L, on obtient du théorème 3 le

Théorème 4. *Les fonctions obtenues des fonctions de Baire d'un nombre fini quelconque de variables réelles par l'application d'un nombre fini de fois* (dans n'importe quel ordre) *des opérations* $\lim\limits_{k}$ *et* $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$ *sont mesurables L.*

Le théorème 2 n'est qu'un cas particulier du théorème 4. Vu que $\underline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, \Phi = -\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, (-\Phi)$, on peut remplacer dans le théorème 2 (dans la formule (1)) $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$ par $\underline{\lim\limits_{y=+\infty}}$. On peut aussi démontrer que l'on peut remplacer dans le théorème 4 $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$ par $\underline{\lim\limits_{y=+\infty}}$. Or, on ne sait pas si l'on peut adjoindre dans le théorème 4 aux opérations $\lim\limits_{k}$ et $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$ l'opération $\underline{\lim\limits_{y=+\infty}}$. Cela résulte du

Théorème 5. *E étant un ensemble P_2 linéaire quelconque, il existe une fonction de Baire de classe $\leqslant 2$ de trois variables réelles, $\Phi(x, y, z)$, telle qu'en posant*

$$f(x) = \underline{\lim_{z=+\infty}}\ \overline{\lim_{y=+\infty}}\, \Phi(x, y, z), \tag{12}$$

on a

$$\underset{x}{E}\, [f(x) = 0] = E. \tag{13}$$

Démonstration. Soit E un ensemble P_2 situé sur l'axe OX. Il existe, comme on le sait, pour tout n naturel un ensemble CA (complémentaire analytique), soit H_n, situé dans le plan XOZ entre les droites $z = n$ et $z = n+1$ et dont la projection sur l'axe OX est l'ensemble E. L'ensemble $H = H_1 + H_2 + \ldots$ est encore un CA situé dans le plan XOZ dont la projection sur l'axe OX coïncide avec E. Le complémentaire K de H par rapport au plan XOZ est donc un ensemble analytique, et il existe, pour tout n naturel, un ensemble G_δ dans l'espace à 3 dimensions, soit Q_n, situé entre les plans $y = n$ et $y = n+1$ et dont la projection sur le plan XOZ est l'ensemble K. L'ensemble $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots$ est, comme on le voit sans peine, encore un G_δ dans l'espace à 3 dimensions dont la projection sur le plan XOZ est l'ensemble K.

Soit $\Phi(x, y, z)$ la fonction caractéristique de l'ensemble Q; Q étant un G_δ, $\Phi(x, y, z)$ est une fonction de classe $\leqslant 2$. Je dis qu'on a la formule (13).

En effet, on vérifie sans peine que $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, \Phi(x, y, z)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble K et on en déduit, d'après (12), que $f(x) = 0$ pour $x \in E$ et $f(x) = 1$ pour x non $\in E$, d'où la formule (13).

Grâce à un résultat de M. Kuratowski qui a défini par des moyens tout à fait élémentaires, un ensemble linéaire $CPCA$ (complémentaire d'un P_2) tel qu'on ne peut décider si cet ensemble est mesurable ou non [6]), on pourrait définir effectivement une fonction $\Phi(x, y, z)$ de classe 2, telle qu'il manque actuellement de méthode pour décider si la fonction (12) est mesurable L ou non.

Or, vu le théorème 2 (généralisé aux fonctions de trois variables réelles), vu que $\underline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, \Phi = -\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, (-\Phi)$ et vu le théorème 4, on conclut sans peine que si $\Phi(x, y, z)$ est une fonction de classe $\leqslant 1$, la fonction (12) est mesurable L.

[6]) Comptes rendus du Congrès Int. des Math. Zürich 1932, t. II, pp. 117-118.