Sur les familles croissantes d'ensembles fermés.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Théorème 1. *Φ étant une famille croissante d'ensembles fermés situés dans un espace métrique quelconque, la somme S de tous les ensembles de la famille Φ est un ensemble F_σ.*

Démonstration. Soit M un espace métrique quelconque avec la distance ϱ, et soit Φ une famille croissante de sous-ensembles fermés de M (c.-à-d. telle que, E et H étant deux ensembles de Φ, on a ou bien $E\subset H$, ou bien $H\subset E$). Distinguons deux cas:

1) Il existe une suite infinie $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles de la famille Φ, telle que $S=E_1+E_2+\ldots$ Dans ce cas S est évidemment un ensemble F_σ (puisque les ensembles $E_1, E_2, \ldots$, en tant qu'éléments de Φ, sont fermés).

2) Le cas 1) n'a pas lieu. Je dis qu'alors, $E_1, E_2, \ldots$ désignant une suite infinie quelconque d'ensembles de Φ, il existe un ensemble E de Φ, tel que $E_n\subset E$ pour $n=1,2,\ldots$ Soit, en effet, $p \epsilon S-(E_1+E_2+\ldots)\neq 0$. Comme $p \epsilon S$, il existe un ensemble E de Φ, tel que $p \epsilon E$. Soit n un nombre naturel quelconque. Comme $p \epsilon E-E_n$ et les ensembles E et E_n appartiennent à la famille croissante Φ, on a donc $E_n\subset E$, c. q. f. d.

Je dis maintenant que dans le cas 2) l'ensemble S est fermé. En effet, soit $p \epsilon S'$. Il existe donc, pour tout n naturel, un point $p_n \epsilon S$ tel que $\varrho(p_n, p)<1/n$. Comme $p_n \epsilon S$, il existe un ensemble E_n de Φ tel que $p_n \epsilon E_n$. Or, comme nous avons vu, il existe (dans notre cas) un ensemble E de Φ, tel que $E_n\subset E$ pour $n=1,2,\ldots$ On a donc $p_n \epsilon E$ pour $n=1,2,\ldots$ et, comme $p=\lim_{n=\infty} p_n$ et l'ensemble E, en tant qu'élément de Φ, étant fermé, on trouve $p \epsilon E$, donc, à plus forte raison, $p \epsilon S$. Nous avons ainsi démontré que $S'\subset S$, c.-à-d. que S est fermé.

Notre théorème est ainsi démontré.

Soit, en particulier, $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ une suite transfinie du type Ω d'ensembles fermés distincts d'un espace métrique, telle que $E_\xi\subset E_\eta$ pour $\xi<\eta<\Omega$. On est évidemment alors dans le cas 2) et on en conclut que l'ensemble $\sum_{\xi<\Omega} E_\xi$ est fermé. Donc:

La somme d'une suite transfinie croissante du type Ω d'ensembles fermés distincts d'un espace métrique est toujours un ensemble fermé.

En passant aux complémentaires (par rapport à l'espace M) on déduit tout de suite du théorème 1 le

Théorème 2. *Φ étant une famille croissante d'ensembles ouverts situés dans un espace métrique quelconque, le produit de tous les ensembles de la famille Φ est un ensemble G_δ.*

Théorème 3. *$\{E^\lambda\}_{\lambda<\varphi}$ étant une suite transfinie croissante quelconque du type φ, où φ est un nombre ordinal de seconde espèce, d'ensembles fermés d'un espace métrique, l'ensemble $\sum_{\lambda<\varphi}(E^{\lambda+1}-E^\lambda)$ est un F_σ.*

Démonstration. Désignons, pour $\lambda<\varphi$ et pour n naturel, par $E_n^{\lambda+1}$ l'ensemble de tous les points p de $E^{\lambda+1}$, tels que $\varrho(p, E^\lambda)\geqslant 1/n$. Comme on voit sans peine, les ensembles $E_n^{\lambda+1}$ sont fermés. On a évidemment

$$\sum_{\lambda<\varphi}(E^{\lambda+1}-E^\lambda)=\sum_{\lambda<\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}E_n^{\lambda+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda<\varphi}E_n^{\lambda+1},$$

et, pour démontrer notre théorème, il suffit de prouver que les ensembles $H_n=\sum_{\lambda<\varphi}E_n^{\lambda+1}$ sont fermés (pour $n=1,2,\ldots$).

À ce but il est à remarquer d'abord que si $p \epsilon E_n^{\xi+1}$, $q \epsilon E_n^{\eta+1}$ et $\varrho(p,q)<1/n$, on a nécessairement $\xi=\eta$. En effet, comme $p \epsilon E_n^{\xi+1}$, on a $\varrho(p, E^\xi)\geqslant 1/n$. Si l'on avait $\eta<\xi$, donc $\eta+1\leqslant\xi$, on aurait $q \epsilon E_n^{\eta+1}\subset E^{\eta+1}\subset E^\xi$, donc $q \epsilon E^\xi$, ce qui est impossible, puisque $\varrho(p,q)<1/n$ et $\varrho(p,E^\xi)\geqslant 1/n$. On a donc $\xi\leqslant\eta$. Pareillement, on prouve que $\eta\leqslant\xi$. On a donc $\xi=\eta$, c. q. f. d.

Il en résulte tout de suite que, p_0 étant un point de l'espace M, tous les éléments p de H_n, tels que $\varrho(p,p_0)<1/2n$, appartiennent au même terme de la somme $\sum_{\lambda<\varphi}E_n^{\lambda+1}$, donc au même ensemble fermé, soit $E_n^{\mu+1}$. Donc, si $p_0 \epsilon H_n'$, on a $p \epsilon E_n^{\mu+1}$ et, à plus forte raison, $p_0 \epsilon H_n$. L'ensemble H_n est donc fermé et notre théorème est démontré.

Théorème 4. *Φ étant une famille croissante d'ensembles clairsemés situés dans un espace métrique quelconque, la somme S de tous les ensembles de la famille Φ est un ensemble F_σ.*

Démonstration. Distinguons deux cas, comme dans la démonstration du théorème 1. Dans le cas 1), S est un ensemble F_σ, puisque, comme on sait, tout ensemble clairsené est un F_σ[1]).

Dans le cas 2), S est un ensemble clairsemé. En effet, tout d'abord, comme dans la démonstration du théorème 1, on voit que $E_1, E_2, \ldots$ étant une suite infinie quelconque d'ensembles de Φ, il existe un ensemble E de Φ, tel que $E_n \subset E$ pour $n=1,2,\ldots$

Admettons maintenant que l'ensemble S n'est pas clairsemé; il contient donc un sous-ensemble (non vide) dense en soi. Or, comme on sait, tout ensemble dense en soi contient un sous-ensemble dense en soi dénombrable; il existe donc un sous-ensemble D de S, dense en soi et dénombrable. Soit $D=\{p_1, p_2, \ldots\}$. Comme $p_n \epsilon S$, il existe un ensemble E_n de Φ tel que $p_n \epsilon E_n$. Or, comme nous avons vu, il existe (dans notre cas) un ensemble E de Φ tel que $E_n \subset E$ pour $n=1,2,\ldots$, et on a $D \subset E$. Or, c'est impossible, E (en tant qu'ensemble de la famille Φ) étant clairsemé et D étant dense en soi.

Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) Cela peut être démontré comme il suit. E étant un ensemble quelconque contenu dans un espace métrique, désignons par E_1 l'ensemble de tous les points de E dans lesquels E n'est pas un F_σ. Je dis que E_1 n'a pas des points isolés. En effet, admettons que p_0 soit un point isolé de E_1. Il existe donc une sphère K au centre p_0 et telle que $E_1K-\{p_0\}=0$, et on a $EK-\{p_0\} \subset (E-E_1)K$, d'où on conclut que l'ensemble $EK-\{p_0\}$ est localement (c.-à-d. en chaque point) un F_σ; d'après un théorème de M. D. Montgomery (Fund. Math. **25**, p. 530) il en résulte que l'ensemble $EK-\{p_0\}$, donc aussi l'ensemble EK, est un F_σ, contrairement à l'hypothèse que $p_0 \epsilon E_1$.

Si E est un ensemble clairsemé, l'ensemble E_1 (en tant que dépourvu de points isolés) est nécessairement vide; l'ensemble E est donc localement un F_σ, d'où on conclut, d'après le théorème cité de M. Montgomery, que E est un F_σ, c. q. f. d.

Sur l'opération $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}\, \Phi(x,y)$ [1]).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

M. N. Lusin a démontré dans son livre connu[2]) l'existence d'une fonction de classe 2 de Baire de deux variables réelles, $\Phi(x,y)$, telle que la fonction (d'une variable réelle x)

$$f(x) = \overline{\lim_{y=+\infty}}\, \Phi(x,y) \tag{1}$$

(où $\overline{\lim}\,\Phi$ désigne l'opération de Cauchy-Hadamard qui consiste à prendre la plus grande limite d'une fonction) est non mesurable B.

Le but de cette Note est de faire quelques remarques à propos de ce résultat.

En premier lieu je prouverai qu'on ne peut remplacer dans la proposition de M. Lusin la classe 2 par la classe 1. En effet, je démontrerai le

Théorème 1. *Si $\Phi(x,y)$ est une fonction de classe $\leqslant 1$ de deux variables réelles, la fonction (1) est de classe $\leqslant 3$[3]).*

Ensuite je démontrerai le

Théorème 2. *Si $\Phi(x,y)$ est une fonction de Baire de deux variables réelles, la fonction (1) est mesurable L.*

Je déduirai le théorème 2 d'une proposition plus générale concernant certaines familles de fonctions de plusieurs variables réelles.

[1]) Le résumé de cette Note fut publié dans les Acta Pontif. Acad. Scientiarum Vol. IV, 1940, p. 203-204.

[2]) *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, pp. 318-319.

[3]) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1935, pp. 273-274.