Sur un problème de M. Lusin concernant les complémentaires analytiques.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

En 1934 M. N. Lusin a posé le problème suivant [1]).

On sait, que si l'on supprime de deux complémentaires analytiques leur partie commune, on obtient des ensembles restants séparables simultanément au moyen de deux complémentaires analytiques [2]). M. Lusin demande si l'on a une proposition analogue pour la séparabilité multiple.

Je démontrerai ici ce

Théorème 1. *$E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant un nombre fini quelconque des complémentaires analytiques situés dans un espace complet et séparable, il existe dans cet espace n complémentaires analytiques $H_1, H_2, \ldots, H_n$, tels que*

(1) $$H_1 H_2 \ldots H_n = 0$$

et

(2) $$E_k - E_1 E_2 \ldots E_n \subset H_k \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Je déduirai le théorème 1 d'une proposition de la Théorie générale des ensembles (Théorème 2).

Nous dirons qu'une famille Φ d'ensembles jouit de la propriété π_n, si, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant n ensembles quelconques de la famille Φ, il existe toujours n ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_n$ de la famille Φ, tels qu'on a les formules (1) et (2).

Théorème 2. *Si la famille Φ d'ensembles est additive et multiplicative et si elle jouit de la propriété π_2, elle jouit de la propriété π_n pour $n = 2, 3, 4, \ldots$*

[1]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1934, p. 283.

[2]) N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, p. 217.

Démonstration. Procédons par induction. Soit Φ une famille d'ensembles additive et multiplicative et, n étant un nombre naturel donné $\geqslant 3$, supposons que la famille Φ jouisse des propriétés π_2 et π_{n-1} (ce qui est vrai, d'après l'hypothèse du théorème 2, pour $n=3$), et soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles de la famille Φ. Cette dernière jouissant de la propriété π_{n-1}, il existe $n-1$ ensembles de Φ, $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, tels que

(3) $$M_1 M_2 \ldots M_{n-1} = 0$$

et

(4) $$E_k - E_1 E_2 \ldots E_{n-1} \subset M_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Posons

(5) $$E = E_1 E_2 \ldots E_{n-1};$$

la famille Φ étant multiplicative, on a $E \epsilon \Phi$.

Or, la famille Φ jouissant de la propriété π_2, il existe deux ensembles H et H_n de Φ, tels que

(6) $$H H_n = 0$$

et

(7) $$E - E_n \subset H \quad \text{et} \quad E_n - E \subset H_n.$$

Posons

(8) $$H_k = M_k + H \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

la famille Φ étant additive, nous aurons $H_k \epsilon \Phi$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Je dis que nous aurons les formules (1) et (2).

En effet, d'après (8) on a

$$H_1 H_2 \ldots H_n = \prod_{k=1}^{n-1} (M_k + H) \cdot H_n \subset \prod_{k=1}^{n-1} M_k \cdot H_n + H H_n,$$

d'où, d'après (3) et (6) on trouve la formule (1).

Or, d'après (5), on a, pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$E_k - E_1 E_2 \ldots E_n = E_k - E E_n = (E_k - E) + E_k (E - E_n),$$

donc, d'après (4), (5), (7) et (8):

(9) $$E_k - E_1 E_2 \ldots E_n \subset M_k + H = H_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Vu (5) et (7) on a

(10) $$E_n - E_1 E_2 \ldots E_n = E_n - E E_n = E_n - E \subset H_n.$$

Les formules (9) et (10) donnent les formules (2). La famille Φ jouit donc de la propriété π_n. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré par induction.

Or, il est à remarquer que le théorème 2 cesse d'être vrai pour $n=\aleph_0$. Soit, en effet, Φ la famille de tous les ensembles linéaires qui sont à la fois F_σ et G_δ. La famille Φ est, comme on le sait, additive, multiplicative et soustractive, elle jouit donc de la propriété π_2. Soit maintenant

(11) $$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels et soit E_n l'ensemble de tous les nombres réels sauf les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Les ensembles E_k $(k=1,2,\ldots)$ sont évidemment ouverts, donc $E_k \in \Phi$ pour $k=1,2,\ldots$ L'ensemble $E=E_1E_2E_3\ldots$ est ici formé de tous les nombres irrationnels et on a

$$E_k-E=\{r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots\} \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

Les ensembles E_k-E (où $k=1,2,\ldots$) sont donc denses dans tout intervalle. Soient maintenant H_k $(k=1,2,\ldots)$ des ensembles de la famille Φ, tels que

(12) $$E_k-E \subset H_k \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

Les ensembles H_k $(k=1,2,\ldots)$ en tant que des G_δ denses dans tout intervalle, sont des complémentaires des ensembles de 1ère catégorie, de même que leur produit $H_1H_2H_3\ldots$: ce dernier ne peut donc être vide. Il n'existe donc aucune suite infinie H_k $(k=1,2,\ldots)$ d'ensembles de la famille Φ dont le produit soit vide et pour lesquels on ait les formules (12). La famille Φ ne jouit pas donc de la propriéte $\pi_{\aleph_0}$, quoiqu'elle jouisse de la propriété π_n pour $=1,2,\ldots$

La famille de tous les complémentaires analytiques situés dans un espace complet et séparable est, comme on le sait, additive et multiplicative, et satisfait au théorème de réduction de M. Kuratowski[3]), d'où il résulte sans peine qu'elle jouit de la propriété π_2. Le théorème 1 est ainsi une conséquence immédiate du théorème 2.

Vu que la famille de tous les ensembles $PC(A)$ est aussi additive et multiplicative et satisfait au théorème de réduction[4]), on peut remplacer dans le théorème 1 les complémentaires analytiques par les ensembles $PC(A)$.

[3]) C. Kuratowski, Fund. Math. **26**, p. 186, nº 3.

[4]) Voir C. Kuratowski, l. c., p. 187, nº 4.

Or, le problème reste ouvert si, $E_1, E_2, \ldots$ étant une suite infinie des complémentaires analytiques (linéaires), il existe toujours une suite infinie $H_1, H_2, \ldots$ de complémentaires analytiques tels que

$$H_1H_2H_3\ldots=0$$

et

$$E_k-E_1E_2E_3\ldots \subset H_k \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

La famille des ensembles boreliens de classe additive $\alpha>0$ (dans un espace métrique) satisfaisant au théorème de réduction[5]), il résulte tout de suite du théorème 2 qu'elle jouit de la propriété π_n pour $n=1,2,\ldots$, mais je ne sais pas si elle jouit aussi de la propriété $\pi_{\aleph_0}$ (même pour la famille des ensembles F_σ linéaires).

Dans la même Note du 1934, M. Lusin a posé encore un autre problème, à savoir de démontrer l'existence de trois ensembles analytiques qui, lorsqu'on leur enlève la partie commune (à tous les trois) donnent des ensembles restants qui ne soient pas séparables B. La solution de ce problème me semble facile.

Soient, en effet, H_1 et H_2 deux complémentaires analytiques linéaires non séparables B[6]). Soit E_3 l'ensemble de tous les nombres réels et posons $E_1=E_3-H_1$, $E_2=E_3-H_2$. Les ensembles E_1, E_2 et E_3 sont évidemment analytiques et leur produit est l'ensemble $E=E_3-(H_1+H_2)$: en l'enlevant aux ensembles E_1, E_2 et E_3, on obtient (vu que $H_1H_2=0$) les ensembles

$$E_1-E=H_2, \quad E_2-E=H_1 \quad \text{et} \quad E_3-E=H_1+H_2.$$

Si ces trois ensembles étaient séparables B, il existerait trois ensembles mesurables B, Q_1, Q_2 et Q_3, tels que

$$Q_1Q_2Q_3=0, \quad H_1\subset Q_1, \quad H_2\subset Q_2, \quad H_1+H_2\subset Q_3$$

et Q_1Q_3 et Q_2Q_3 seraient deux ensembles disjoints mesurables B contenant le premier H_1 et le second H_2, ce qui est impossible, les ensembles H_1 et H_2 n'étant pas séparables B.

Les ensembles analytiques E_1, E_2 et E_3 jouissent donc des propriétés désirées par M. Lusin.

[5]) Voir C. Kuratowski, l. c., p. 186, nº 2.

[6]) Pour la démonstration d'existence de tels ensembles voir p. e. le livre cité de M. Lusin, pp. 220, 260 et 263.