σ-extensions.

If μ is a σ-measure in a σ-field M and	then there exists a σ-extension ν of μ to $[M,Z]$ such that		
	(a) $\nu(Z)=\mu_i(Z)$	(b) $\nu(Z)=\xi$ where $\mu_i(Z)<\xi<\mu_e(Z)$	(c) $\nu(Z)=\mu_e(Z)$
(A) $\mu_e(Z)<+\infty$	E — Th. 4 U — 7 (ii)	E — Th. 4 U′— 7 (i)	E — Th. 4 U — 7 (iii)
(B) $\mu_i(Z)<\mu_e(Z)=+\infty$	E — Th. 4 U — 7 (ii)	N — Th. 5	E — Th. 4 U′— 7 (v)
(C) $\mu_i(Z)=+\infty$	E — Th. 4 U′— 7 (iv)	N — Contradiction between (C) and (b)	E — Th. 4 U′— 7 (iv)

Quelques généralisations des théorèmes sur les coupures du plan [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Soit sur le plan des nombres complexes, augmenté du point à l'infini, $A_0,\dots,A_{n-1}$ un système de n ($\geqslant 3$) ensembles arbitraires. Posons

(1) $\mathfrak{X}=A_0+\dots+A_{n-1}$, (2) $B_k=A_{k+1}+\dots+A_{k+n-1}$,

(3) $C_k=A_{k+1}+\dots+A_{k+n-2}$, (4) $P=C_0\cdot\ldots\cdot C_{n-1}$,

les indices étant réduits mod. n (dans les formules (2) et (3)).

La seule hypothèse faite sur les ensembles $A_0,\dots,A_{n-1}$ est que

(i) *les ensembles $C_0,\dots,C_{n-1}$ sont connexes.*

Nous nous proposons d'établir les deux théorèmes suivants [2]):

Théorème 1. *Soient p et q deux points situés en dehors de $\mathfrak{X}$. Sous les hypothèses que:*

(ii) *aucun des ensembles B_k ne coupe le plan entre p et q* [3]),

(iii) $P\neq 0$,

— *l'ensemble $\mathfrak{X}$ ne coupe pas le plan entre p et q.*

---

[1]) Communication présentée au Congrès des mathématiciens polonais et tchéquoslovaques à Prague, le 30. VIII. 1949.

[2]) Pour $n=3$, les théorèmes 1 et 2 ont été établis par S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. **26** (1936), p. 78 et 79. Les théorèmes de Eilenberg généralisent le théorème „*sur trois continus*" (voir ma note des Monatsh. Math.-Phys. **36** (1929), p. 77), ainsi que certains théorèmes de E. Čech, publiés dans sa note *Trois théorèmes sur l'homologie*, Publ. Univ. Mas. **19** (1931), p. 20.

[3]) Un ensemble E *coupe* le plan entre les points p et q lorsqu'il n'existe aucun continu unissant ces points en dehors de E.

Théorème 2. *Soient p, q et r trois points situés en dehors de $\mathcal{X}$. Sous l'hypothèse que:*

(ii′) *aucun des ensembles B_k ne coupe le plan entre aucun des trois couples: (p,q), (q,r) et (r,p),*

— *l'ensemble $\mathcal{X}$ ne coupe pas le plan entre l'un au moins des trois couples precités.*

1. Nous allons nous servir des notations suivantes.

$\mathcal{E}^2$ désigne le plan des nombres complexes finis. $\mathcal{P}=\mathcal{E}^2-$ le point 0. $\mathcal{X}$ étant un espace topologique, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$ et dont les arguments parcourent l'espace $\mathcal{X}$ tout entier.

Étant donnée une fonction f à valeurs complexes qui ne s'annule pas sur un ensemble E, nous écrivons

$$f\sim 1 \quad \text{sur } E\,^{4})$$

dans le cas où la fonction $\log f(x)$ admet une branche continue; c'est-à-dire, s'il existe une fonction continue $u(x)$ telle que

$$f(x)=e^{u(x)} \quad \text{pour } x\in E.$$

Avec ces notations, on a deux théorèmes suivants, dus à S. Eilenberg [5]:

A. *Pour que l'ensemble E ne coupe pas le plan entre les points p et q, il faut et il suffit que*

$$\frac{x-p}{x-q}\sim 1 \quad \textit{sur } E\,^{6}).$$

[4]) Cette notation est empruntée à la théorie des groupes. La multiplication dans le groupe $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ étant définie par l'équivalence:

$$[f_3=f_1\cdot f_2]\equiv[f_3(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)],$$

les fonctions f de la forme $f(x)=e^{u(x)}$ constituent un sous-groupe Γ. La relation $f\sim 1$ mod. Γ signifie donc que f est de la forme envisagée.

[5]) Op. cit., p. 88 (1) et 90, lemme 1. Les théorèmes A et B y sont formulés d'une façon légèrement différente. Cf. aussi mon mémoire de Fund. Math. **33** (1945), p. 316.

[6]) Cette formule est applicable aussi au point à l'infini, en convenant que, pour $q=\infty$, on pose $x-q=1$.

B. *Pour que l'ensemble E ne coupe pas le plan entre l'un au moins des couples (p,q), (q,r) ou (r,p), il faut et il suffit qu'il existe deux entiers m et j qui ne s'annulent pas simultanément et tels que*

$$\left(\frac{x-p}{x-q}\right)^m\cdot\left(\frac{x-r}{x-q}\right)^j\sim 1 \quad \textit{sur } E\,^{7}).$$

Les théorèmes A et B permettent aussitôt de réduire la démonstration des théorèmes 1 et 2 à celle des théorèmes suivants [8]):

Théorème 1*[9]). *Soit $f\in\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$. Sous les hypothèses:* (i), (iii) *et*

(ii*) $$f\sim 1 \quad \textit{sur } B_k \quad \textit{où } k=0,\dots,n-1,$$

on a $f\sim 1$ sur $\mathcal{X}$.

Théorème 2*[10]). *Soient $f\in\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ et $g\in\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$. Sous les hypothèses* (i) *et*

(ii′*) $f\sim 1$ *sur* B_k *et* $g\sim 1$ *sur* B_k (*où* $k=0,\dots,n-1$),

il existe deux entiers: m et j, qui ne s'annulent pas simultanément et tels que

$$f^m\cdot g^j\sim 1 \quad \textit{sur } \mathcal{X}.$$

2. ***Lemme.*** *Étant donné un système de fonctions $h_0,\dots,h_{n-1}$ définies respectivement sur les ensembles $B_0,\dots,B_{n-1}$ et satisfaisant à la condition*

(5) $$h_k(x)=h_{k+1}(x) \quad \textit{sur } C_{k+1} \quad \textit{pour } k=0,1,\dots,n-1,$$

il existe une fonction h définie sur $\mathcal{X}$ et telle que

(6) $$h(x)=h_k(x) \quad \textit{pour } x\in B_k \quad (\textit{où } k=0,1,\dots,n-1).$$

De plus, *si les fonctions h_k sont continues, la fonction h l'est également.*

Remarquons d'abord que

(7) $$A_k\subset C_{k+2}\cdot\ldots\cdot C_{k+n-1}$$

et que, par conséquent,

(8) $$h_{k+1}(x)=h_{k+2}(x)=\ldots=h_{k+n-1}(x) \quad \text{pour } x\in A_k.$$

[7]) Cela veut dire que les fonctions: $\dfrac{x-p}{x-q}$ et $\dfrac{x-r}{x-q}$ ne sont pas linéairement indépendantes mod. Γ.

L'énoncé B s'étend au cas d'un nombre fini arbitraire de points $p_0,p_1,\dots,p_n$. Voir S. Eilenberg, l. c., p. 90.

[8]) Désormais $\mathcal{X}$ désigne un espace métrique arbitraire.

[9]) Pour $n=3$, voir S. Eilenberg, l. c., p. 79.

[10]) Pour $n=3$, voir ma note *Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens*, Fund. Math. **31** (1938), p. 245.

Soit $x \in B_j \cdot B_l$ où $j \neq l$[11]). Il s'agit de montrer que

$$h_j(x) = h_l(x). \tag{9}$$

Comme $x \in B_j \cdot B_l$, il existe deux entiers k et t tels que

$$k \neq j, \quad t \neq l \quad \text{et} \quad x \in A_k \cdot A_t. \tag{10}$$

Si $l \neq k$, l'égalité (9) résulte de (8), car les indices j et l appartiennent au système $k+1, \ldots, k+n-1$, mod. n.

Il en est de même si $j \neq t$, car dans ce cas, j et l appartiennent au système $t+1, \ldots, t+n-1$, mod. n.

Reste à considérer le cas où $l = k$ et $j = t$. L'entier n étant supposé $\geqslant 3$, soit m un indice tel que $k \neq m \neq t$, d'où en vertu de (10)

$$j \neq k \neq m \quad \text{et} \quad m \neq t \neq l.$$

On en conclut comme auparavant que

$$h_j(x) = h_m(x) \quad \text{et} \quad h_m(x) = h_l(x),$$

d'où l'égalité (9).

Admettons à présent que les fonctions h_k soient continues. Soit $\lim\limits_{m=\infty} x_m = x_0$. Soient j un indice et $i_1 < i_2 < \ldots$ une suite tels que $x_{i_m} \in A_j$.

Il s'agit de montrer que

$$\lim_{m=\infty} h(x_{i_m}) = h(x_0). \tag{11}$$

Posons $x_0 \in A_0$. Soit k un indice tel que $0 \neq k \neq j$. Il vient

$$A_0 + A_j \subset B_k, \quad \text{d'où} \quad \lim_{m=\infty} h_k(x_{i_m}) = h_k(x_0),$$

la fonction h_k étant continue sur B_k.

L'égalité (11) en résulte en vertu de (6).

3. *Démonstration du théorème 1.** D'après (ii*), il existe pour tout k une fonction $u_k \in (\mathcal{E}^1)^{B_k}$ telle que

$$f(x) = e^{2\pi i u_k(x)} \quad \text{pour} \quad x \in B_k. \tag{12}$$

Comme $C_{k+1} \subset B_k \cdot B_{k+1}$, les fonctions u_k et u_{k+1} sont définies pour tout point x de C_{k+1}. On a donc

$$e^{2\pi i u_k(x)} = e^{2\pi i u_{k+1}(x)} \quad \text{sur} \quad C_{k+1}.$$

[11]) Toutes les inégalités sont entendues, dans cette démonstration, mod. n.

Il existe par conséquent, un entier a_k tel que

$$u_k(x) - u_{k+1}(x) = a_k \quad \text{sur} \quad C_{k+1} \tag{13}$$

(cet entier ne dépend pas de x, puisque C_{k+1} est connexe d'après (i) et la fonction $u_k(x) - u_{k+1}(x)$ est continue et n'admet que des valeurs entières).

Posons

$$\begin{cases} h_0(x) = u_0(x) & \text{sur} \quad B_0, \\ h_1(x) = u_1(x) + a_0 & \text{sur} \quad B_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ h_n(x) = u_n(x) + a_0 + \ldots + a_{n-1} & \text{sur} \quad B_n. \end{cases} \tag{14}$$

Il vient

$$h_k(x) = h_0(x), \tag{15}$$

c'est-à-dire que $a_0 + \ldots + a_{n-1} = 0$. Car en posant conformément à (iii): $x_0 \in P$, les équations (13) sont vérifiées par x_0 simultanément pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Les formules (13) — (15) entraînent aussitôt (5). Il existe donc d'après le lemme une fonction $h \in (\mathcal{E}^1)^{\mathfrak{X}}$ satisfaisant à (6).

Il reste à démontrer que

$$f(x) = e^{2\pi i h(x)} \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{16}$$

Posons, dans ce but, $x \in B_k$. Il vient d'après (12) et (14)

$$f(x) = e^{2\pi i u_k(x)} = e^{2\pi i [u_k(x) + a_0 + \ldots + a_{k-1}]} = e^{2\pi i h_k(x)},$$

d'où la formule (16) en vertu de (6).

4. *Démonstration du théorème 2.** L'idée de la démonstration est analogue. D'après (ii'*), il existe pour tout k, deux fonctions $u_k \in (\mathcal{E}^1)^{B_k}$ et $v_k \in (\mathcal{E}^1)^{B_k}$ telles que

$$f(x) = e^{2\pi i u_k(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{2\pi i v_k(x)} \quad \text{pour} \quad x \in B_k. \tag{17}$$

La connexité de l'ensemble C_{k+1} implique l'existence d'entiers a_k et b_k (où $k = 0, 1, \ldots, n-1$) tels que

$$u_k(x) - u_{k+1}(x) = a_k \quad \text{et} \quad v_k(x) - v_{k+1}(x) = b_k \quad \text{sur} \quad C_{k+1}. \tag{18}$$

Posons

$$a = a_0 + \ldots + a_{n-1} \quad \text{et} \quad b = b_0 + \ldots + b_{n-1}. \tag{19}$$

Définissons les entiers m et j de façon que

$$ma + jb = 0 \quad \text{et} \quad |m| + |j| \neq 0. \tag{20}$$

Soient:

$$(21)\quad \begin{cases} h_0(x)=m\cdot u_0(x)+j\cdot v_0(x) \\ h_1(x)=m[u_1(x)+a_0]+j[v_1(x)+b_0] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_n(x)=m[u_n(x)+a_0+\ldots+a_{n-1}]+j[v_n(x)+b_0+\ldots+b_{n-1}]. \end{cases}$$

Il vient en vertu de (19) et (20):

$$(22)\qquad h_n(x)=h_0(x),$$

d'où la formule (5) en raison de (18) et (21). Il existe donc une fonction $h \in (\mathcal{E}^2)^{\mathfrak{X}}$ satisfaisant à la condition (6).

Nous allons démontrer que $f^m\cdot g^j\sim 1$, à savoir que

$$(23)\qquad f^m(x)\cdot g^j(x)=e^{2\pi i h(x)}.$$

Posons $x \in B_k$. Il vient d'après (17) et (21):

$$f^m(x)\cdot g^j(x)=e^{2\pi i[mu_k(x)+jv_k(x)]}=e^{2\pi i h_k(x)},$$

d'où l'égalité (23) en vertu de (6).

On derivates of discontinuous functions.

By

W. Sierpiński and A. N. Singh (Lucknow, India).

Stefan Mazurkiewicz has shown that *there exists a function $f(x)$ continuous on the right* (*therefore of class* 1) *and such that everywhere* $f'_+(x)=+\infty$ [1]. The object of this note is to prove the following:

Theorem I. *There exists a function $f(x)$ continuous on the right, but discontinuous at an everywhere dense set such that everywhere $f'_+(x)=0$.*

Proof. In order to prove the above we construct a simple example of a monotone function $f(x)$ having the properties stated in theorem I.

Let x in (0,1) be expressed in the scale of 2 as

$$(1)\qquad x=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}+\ldots$$

with infinitely many $a_n=0$. This means that whenever x has two representations

$$(a)\qquad x=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_m}{2^m}\qquad (a_m\neq 0)$$

$$(b)\qquad =\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{0}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\ldots,$$

we choose the form (a), i. e. the ending representation. There is, therefore, always an infinite number of zeros in the representation of x, which is unique in the form (1).

---

[1]) See S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **23** (1934), pp. 9-10 and A. N. Singh Fund. Math. **33** (1945), pp. 106-107.