Sur les séries infinies de nombres ordinaux.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Il existe des séries infinies de types ordinaux dont la somme change de valeur avec chaque changement de l'ordre de ses termes. On peut démontrer que telle est par exemple la série infinie

$$\eta+2\eta+3\eta+\dots \tag{1}$$

où η est le type d'ordre de l'ensemble de tous les nombres rationnels ordonnés d'après leur grandeur. Il existe donc un ensemble de puissance du continu de types d'ordre différents dont chacun est somme d'une série infinie qui ne diffère de la série (1) que par l'ordre de ses termes.

Le problème s'impose de savoir ce qui en est pour les séries infinies de nombres ordinaux. Je démontrerai le

Théorème. *En changeant l'ordre des termes d'une série infinie donnée (de type ω) de nombres ordinaux, on n'obtient qu'un nombre fini de valeurs distinctes pour la somme de cette série.*

Démonstration. Soit $a_1+a_2+a_3+\dots$ une série infinie de nombres ordinaux, σ — sa somme (dans l'ordre considéré). Le théorème est évidemment vrai si cette série ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Nous pouvons donc supposer que ce n'est pas le cas. La somme σ est alors un nombre de seconde espèce. Soit ϱ le plus petit reste (positif) du nombre σ. On a donc $\varrho\geqslant\omega$, ϱ est un *terme premier* et $\xi+\varrho=\varrho$ pour $\xi<\varrho$.

Nous dirons qu'un terme a_k de notre série *jouit de la propriété P*, s'il n'existe qu'un nombre fini (ou nul) de nombres naturels n tels que $a_n\geqslant a_k$. Je dis que le nombre de termes a_k jouissant de la propriété P est fini.

En effet, admettons qu'il est infini: soient $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots$ ces nombres. Il résulte tout de suite de la définition de la propriété P que $a_{m_i}<a_{m_1}$ pour i suffisamment grand; soit $a_{m_{i_1}}<a_{m_1}$. Pareillement on trouve $a_{m_{i_2}}<a_{m_{i_1}}$, et ainsi de suite. On arrive donc à une suite infinie décroissante de nombres ordinaux, ce qui est impossible.

Soient

$$a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_s} \qquad (\text{où } m_1<m_2<\dots<m_s) \tag{2}$$

tous les termes de notre série jouissant de la propriété P. ϱ étant le plus petit reste du nombre $\sigma=a_1+a_2+\dots$, on a, pour p suffisamment grand, $\varrho=a_{p+1}+a_{p+2}+\dots$, et nous pouvons supposer que p est un indice $>m_s$.

Je dis que toute somme d'une série infinie qui ne diffère de la série $a_1+a_2+\dots$ que par l'ordre de ses termes, est égale à

$$a_{k_1}+a_{k_2}+\dots+a_{k_s}+\varrho, \tag{3}$$

où $k_1, k_2, \dots, k_s$ est une permutation des nombres $m_1, m_2, \dots, m_s$. J'établirai d'abord à cet effet une propriété des termes premiers qui présente une généralisation de la propriété connue des termes premiers ϱ, d'après laquelle on a $\xi+\varrho=\varrho$ pour $\xi<\varrho$.

Lemme. *Si ϱ est un terme premier et a un nombre ordinal quelconque, on a*

$$\xi+a+\varrho=a+\varrho \quad \textit{pour} \quad \xi<\varrho. \tag{4}$$

Démonstration du lemme. ϱ étant un terme premier, on a $\xi+\varrho=\varrho$ pour $\xi<\varrho$.

Si $\xi+a\leqslant a$, on a $\xi+a=a$ et la formule (4) est vraie.

Si $\xi+a>a$, on ne peut avoir $a\geqslant\xi\omega$, puisqu'on aurait alors $a=\xi\omega+\tau$, où $\tau\geqslant 0$, d'où:

$$\xi+a=\xi+\xi\omega+\tau=\xi\omega+\tau=a.$$

On a donc $a<\xi\omega$ et il en résulte, comme on le sait, qu'il existe un nombre naturel n tel que $a<\xi n$, d'où

$$\varrho\leqslant a+\varrho\leqslant\xi+a+\varrho\leqslant\xi+\xi\cdot n+\varrho=\varrho,$$

ce qui donne $a+\varrho=\xi+a+\varrho$, donc la formule (4).

Le lemme est ainsi démontré.

Revenons à la démonstration du théorème. Soit $\sigma' = \beta_1 + \beta_2 + \ldots$ une série infinie qui ne diffère que par l'ordre de ses termes de la série $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ Il existe donc un indice q tel que, pour $k > q$, β_k n'est pas un terme de la suite (2), et il existe une infinité de nombres naturels n tels que $\alpha_n \geqslant \beta_k$. Je dis que

$$\beta_{q+1} + \beta_{q+2} + \ldots = \varrho. \tag{5}$$

Il existe, en effet, un indice $n_1 > p > m_s$ tel que $\alpha_{n_1} \geqslant \beta_{q+1}$, ensuite un indice $n_2 > n_1$ tel que $\alpha_{n_2} \geqslant \beta_{q+2}$, puis un indice $n_3 > n_2$ tel que $\alpha_{n_3} \geqslant \beta_{q+3}$, et ainsi de suite. On a donc

$$\beta_{q+1} + \beta_{q+2} + \ldots \leqslant \alpha_{n_1} + \alpha_{n_2} + \ldots \leqslant \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots = \varrho.$$

Or, si l'on pose $\beta_{q+1} + \beta_{q+2} + \ldots = \varrho'$, on démontre de même que $\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots \leqslant \varrho'$ (puisque les séries $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ et $\beta_1 + \beta_2 + \ldots$ ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes). On a donc $\varrho' = \varrho$, c. à d. la formule (5).

Si β_k n'est pas un terme de la suite (2), il existe une infinité de n tels que $\alpha_n \geqslant \beta_k$ et on a évidemment $\beta_k < \varrho$. $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_q$ est donc une somme dont les termes sont des nombres (2) (qui tous figurent dans la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, chacun une fois) ou bien sont des nombres ordinaux $< \varrho$. D'après le lemme de tels termes peuvent être omis sans changer la valeur de la somme. Il en résulte tout de suite que la somme $\beta_1 + \beta_2 + \ldots$ est de la forme (3).

Or, l'ensemble des nombres de la forme (3) étant fini, notre théorème se trouve démontré.

En particulier, s'il n'existe dans la série $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ aucun terme jouissant de la propriété P, il résulte tout de suite de la démonstration de notre théorème que:

Corollaire. *Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ est une série infinie de nombres ordinaux telle qu'il existe pour tout terme α_k une infinité d'indices n tels que $\alpha_n \geqslant \alpha_k$, la somme de cette série ne dépend pas de l'ordre de ses termes* [1]).

Telles sont, en particulier, les séries dont les termes vont en croissant.

Il est facile de donner, pour tout n naturel, un exemple d'une série infinie de nombres ordinaux positifs admettant précisément n

[1]) La condition de ce corollaire n'est pas nécessaire pour que la somme ne dépende pas de l'ordre de ses termes, comme le prouve la série $\omega + 1 + 2 + 3 + \ldots$

valeurs distinctes de sa somme, lorsqu'on change l'ordre de ses termes. Telle est par exemple, comme on le vérifie sans peine, la série $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$, où $\alpha_i = \omega$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\alpha_n = \omega^2$ et $\alpha_i = 1$ pour $i \geqslant n+1$. Les valeurs de la somme de cette série (lorsqu'on change l'ordre de ses termes) sont (seulement) les nombres $\omega^2 + \omega \cdot k$, où $k = 1, 2, \ldots, n$.

Il est à remarquer que la somme d'une série transfinie du type $\omega + \omega$, et même du type $\omega + 1$, de nombres ordinaux, peut donner une infinité de valeurs différentes lorsqu'on change l'ordre de ses termes. Ainsi la série (du type $\omega + 1$) $1 + 2 + 3 + \ldots + \omega = \omega \cdot 2$, lorsqu'on y échange les termes n et ω, donne la somme $\omega \cdot 2 + n$, et la série (du type $\omega + \omega$) $\omega^2 \cdot 1 + \omega^2 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 3 + \ldots + 1 + 2 + 3 + \ldots = \omega^3 + \omega$, lorsqu'on échange les termes $\omega^2 \cdot n$ et 1, donne la somme $\omega^3 + \omega^2 \cdot n + \omega$, et ces sommes sont toutes différentes, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

λ étant un nombre ordinal de deuxième classe, on peut démontrer que toute série transfinie du type λ de nombres ordinaux admet au plus $\aleph_0$ valeurs distinctes de sa somme, lorsqu'on change l'ordre des termes de cette série.

Or, il existe des séries transfinies du type Ω de nombres ordinaux dont la somme donne $\aleph_1$ valeurs distinctes lorsqu'on change l'ordre de leurs termes. Telle est par exemple la série $\sum\limits_{\xi < \Omega} \alpha_\xi$, où $\alpha_n = \Omega$ pour $n < \omega$ et $\alpha_\xi = 1$ pour tout nombre ordinal ξ tel que $\omega \leqslant \xi < \Omega$. En effet, λ étant un nombre ordinal quelconque de la deuxième classe, notre série ne diffère que par l'ordre de ses termes de la série $\sum\limits_{\xi < \Omega} \beta_\xi$, où $\beta_\xi = \Omega$ pour $\xi < \lambda$ et $\beta_\xi = 1$ pour $\lambda \leqslant \xi < \Omega$, et on prouve sans peine que $\sum\limits_{\xi < \Omega} \beta_\xi = \Omega(\lambda + 1)$. On voit aussi sans peine que la série $\sum\limits_{\xi < \Omega} \gamma_\xi$, où $\gamma_n = 1$ pour $n < \omega$ et $\gamma_\xi = 0$ pour $\omega \leqslant \xi < \Omega$, lorsqu'on change convenablement l'ordre de ses termes, a comme somme chaque nombre ordinal de deuxième classe. Cependant la somme d'une série transfinie quelconque du type Ω de nombres ordinaux positifs $< \Omega$ est égale à Ω.

Voici encore quelques remarques sur les séries finies de nombres ordinaux. α et β étant deux nombres ordinaux, où $\alpha < \beta$, chacun des trois cas suivants peut se présenter: 1) $\alpha + \beta < \beta + \alpha$, 2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, 3) $\alpha + \beta > \beta + \alpha$. En effet, on a: 1) $1 < \omega$ et $1 + \omega < \omega + 1$, 2) $\omega \cdot 2 < \omega \cdot 3$ et $\omega \cdot 2 + \omega \cdot 3 = \omega \cdot 3 + \omega \cdot 2$, 3) $\omega < \omega + 1$ et $\omega + (\omega + 1) > (\omega + 1) + \omega$.

Quant à la somme de trois nombres ordinaux, 5 cas peuvent se présenter lorsqu'on change l'ordre de leurs termes:

1) Il n'y a qu'une seule valeur de la somme, p. e. pour $\omega+\omega\cdot 2+\omega\cdot 3$.

2) Il n'y a que deux valeurs distinctes de la somme, p. e. pour $1+\omega+\omega\cdot 2$, où $1+\omega+\omega\cdot 2=1+\omega\cdot 2+\omega=\omega+1+\omega\cdot 2=$ $=\omega\cdot 2+1+\omega=\omega\cdot 3$, $\omega+\omega\cdot 2+1=\omega\cdot 2+\omega+1=\omega\cdot 3+1$.

3) Il n'y a que trois valeurs distinctes de la somme, p. e. pour $\omega+(\omega+1)+(\omega+2)$, où $\omega+(\omega+1)+(\omega+2)=(\omega+1)+\omega+(\omega+2)=$ $=\omega\cdot 3+2$, $\omega+(\omega+2)+(\omega+1)=(\omega+2)+\omega+(\omega+1)=\omega\cdot 3+1$, $(\omega+1)+(\omega+2)+\omega=(\omega+2)+(\omega+1)+\omega=\omega\cdot 3$.

4) Il n'y a que quatre valeurs distinctes de la somme, p. e. pour $1+\omega+\omega^2$, où $1+\omega+\omega^2=\omega+1+\omega^2=\omega^2$, $\omega+\omega^2+1=\omega^2+1$, $\omega^2+1+\omega=1+\omega^2+\omega=\omega^2+\omega<\omega^2+\omega+1$.

5) Il y a cinq valeurs distinctes de la somme, p. e. pour $\omega+(\omega+1)+\omega^2$, où $(\omega+1)+\omega+\omega^2=\omega+(\omega+1)+\omega^2=\omega^2$, $(\omega+1)+\omega^2+\omega=\omega^2+\omega$, $\omega+\omega^2+(\omega+1)=\omega^2+\omega+1$, $\omega^2+(\omega+1)+\omega=$ $=\omega^2+\omega\cdot 2$, $\omega^2+\omega+(\omega+1)=\omega^2+\omega\cdot 2+1$.

En utilisant la forme canonique des nombres ordinaux, on peut démontrer qu'une somme de trois nombres ordinaux ne peut donner plus de 5 valeurs distinctes lorsqu'on change l'ordre de ses termes.

En effet, soit $\alpha=\omega^{\alpha_1}a_1+\omega^{\alpha_2}a_2+\ldots+\omega^{\alpha_m}a_n$, $\beta=\omega^{\beta_1}b_1+\ldots+\omega^{\beta_n}b_n$, $\gamma=\omega^{\gamma_1}c_1+\ldots+\omega^{\gamma_p}c_p$, où $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_m\geqslant 0$, $\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_n\geqslant 0$, $\gamma_1>\gamma_2>\ldots>\gamma_p\geqslant 0$ et a_i, b_i et c_i sont des nombres naturels. Supposons que $\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant\gamma_1$.

Si $\beta_1<\gamma_1$, on démontre sans peine que $\alpha+\beta+\gamma=\gamma$ et $\beta+\alpha+\gamma=\gamma$.

Si $\alpha_1<\beta_1$, on a $\alpha+\beta=\beta$ et $\alpha+\gamma=\gamma$, donc $\alpha+\gamma+\beta=\gamma+\beta$ et $\gamma+\alpha+\beta=\gamma+\beta$.

Enfin, si $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1$, on a $\alpha+\beta+\gamma=\omega^{\alpha_1}a_1+\omega^{\alpha_1}b_1+\gamma$, $\beta+\alpha+\gamma=\omega^{\alpha_1}b_1+\omega^{\alpha_1}a_1+\gamma$, et, les nombres a_1 et b_1 étant naturels a $\omega^{\alpha_1}a_1+\omega^{\alpha_1}b_1=\omega^{\alpha_1}b_1+\omega^{\alpha_1}a_1$.

Il est intéressant d'observer que la somme de trois nombres ordinaux se comporte autrement que leur produit. En effet, il existe des produits de trois nombres ordinaux qui, lorsqu'on change l'ordre de leurs facteurs, donnent 6 valeurs différentes; tel est par exemple le produit $(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)$. Cela résulte tout de suite de la formule (facile à vérifier):

$$(\omega+n_1)(\omega+n_2)(\omega+n_3)=\omega^3+\omega^2 n_3+\omega n_2+n_1,$$

pour n_1, n_2 et n_3 naturels.

Le produit de trois nombres ordinaux peut donner 6 valeurs différentes (lorsqu'on change l'ordre de ses facteurs) même dans le cas où la somme de ces trois nombres est indépendante de l'ordre de ses termes. Tel est le cas des trois nombres $\omega+1$, $(\omega+1)\cdot 2$, $(\omega+1)\cdot 3$, ce qui résulte sans peine de la formule

$$(\omega+1)n_1(\omega+1)n_2(\omega+1)n_3=\omega^2 n_3+\omega^2 n_2+\omega n_1+1$$

pour n_1, n_2, n_3 naturels.

D'autre part, la somme de trois nombres ordinaux peut donner plusieurs valeurs distinctes (lorsqu'on change l'ordre de ses termes) dans le cas où le produit de ces nombres est indépendant de l'ordre de ses facteurs; tel est le cas des nombres: 1, ω et ω^2.