Cela posé, admettons que les éléments a et b appartiennent à l'espace A. D'après la loi du triangle nous avons

$$|a|-|b|\leqslant|b\pm a| \quad \text{et} \quad -(|a|-|b|)\leqslant|b\pm a|$$

et nous en obtenons, en vertu du lemme, les inégalités (2) et (3). Comme les axiomes de l'espace A_l entraînent ceux de l'espace A, les inégalités (2) et (3) sont *a fortiori* vraies dans A_l. Or, il est évident que dans A_l l'inégalité (3) entraîne (1).

3. Soit A l'ensemble des nombres entiers, où l'addition est entendue au sens ordinaire. On convient que A^* se compose de nombres $0,2,3,4,\ldots$ et l'on admet que $|\pm 1|=5$ et $|\pm n|=n$ pour $n=0,2,3,4,\ldots$ Les axiomes de l'espace sont remplis. Or, la différence $|4-1|-||4|-|1||=3-5=-2$ n'appartient pas à A^*; l'inégalité (1) n'est donc pas satisfaite en général. Cet exemple, du à J. G.-Mikusiński, montre de plus qu'il n'est pas généralement possible de remplacer dans l'inégalité (2) le coefficient 3 par 2. En effet, $2|4-1|-||4|-|1||=6-5=1$.

4. Voici encore deux propositions qui résultent immédiatement de l'inégalité (2):

Proposition 1. *Si* $a, a_\nu \in A$, *où* $\nu=1,2,\ldots$ *et* $\lim a_\nu=a$, *on a* $\lim|a_\nu|=|a|$.

Proposition 2. *Si l'espace A est complet, l'ensemble A^* des élements non négatifs l'est aussi.*

Sur quelques conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace A_l de J. G.-Mikusiński soit topologique au sens de Kuratowski.

Par

Adam Bielecki (Lublin).

Soit E un ensemble contenu dans un espace A_l[1]; nous entendrons par fermeture de E l'ensemble $\overline{E}$ de tous les éléments de A_l qui sont des limites des suites convergentes formées d'éléments de E.

Théorème. *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que l'espace A_l satisfasse aux 3 axiomes topologiques de Kuratowski*[2]:

I. *Si* a, a^i, a^i_n $(i,n=1,2,\ldots)$, *sont des éléments de l'espace A_l et si l'on a*

$$\lim_{i\to\infty} a^i=a \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} a^i_n=a^i,$$

il existe alors deux suites d'entiers positifs $i(\lambda)$ et $n(\lambda)$ telles que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} a^{i(\lambda)}_{n(\lambda)}=a$.

II. *Si* b_n, $(n=1,2,\ldots)$, *est une suite d'éléments non négatifs* (c'est-à-dire appartenant à A_l^*) *de l'espace A_l, il existe une suite de nombres positifs β_n et un élément non négatif b de l'espace A_l tels que l'on a*

$$\beta_n b_n \leqslant b \quad \textit{pour} \quad n=1,2,\ldots \tag{1}$$

III. *Toute suite d'éléments non négatifs de A_l contient une suite partielle remplissant la condition* II.

---

[1]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur certains espaces abstraits*, ce volume, p. 128.

[2]) (I) $\overline{E_1+E_2}=\overline{E}_1+\overline{E}_2$,

(II) si E ne contient qu'un seul point ou n'en contient aucun, on a $\overline{E}=E$,

(III) $\overline{\overline{E}}=\overline{E}$.

C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matemat. **20**, Warszawa—Wrocław 1948.

IV. *Si b_n est une suite d'éléments non négatifs de A_l, il existe une suite de nombres positifs σ_n telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n b_n=0$.*

V. *Toute suite d'éléments appartenant à A_l^* contient une suite partielle satisfaisant à la condition* IV.

La condition I étant évidemment nécessaire et suffisante, il suffit donc de démontrer l'équivalence des conditions I—V.

Supposons d'abord que $b_i \in A_l^*$ pour $i=0,1,2,\dots$ et que $b_0\neq 0$. On a alors

$$\lim_{i\to\infty}\frac{b_0}{i}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_0}{i}+\frac{b_i}{n}\right)=\frac{b_0}{i}.$$

Si la condition I est satisfaite, on en déduit

(2) $$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{b_0}{i(\lambda)}+\frac{b_{i(\lambda)}}{n(\lambda)}\right)=0,$$

d'où $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\dfrac{b_0}{i(\lambda)}=0$. La suite $i(\lambda)$ contient donc une suite partielle croissante d'entiers positifs $i(\lambda(\mu))$. D'autre part, d'après (2),

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{b_{i(\lambda(\mu))}}{n(\lambda(\mu))}=0.$$

Nous avons ainsi démontré que la condition I entraîne la condition V, qui à son tour entraîne évidemment la condition III.

Supposons ensuite que $b_n \in A_l^*$ pour $n=1,2,\dots$ et posons $c_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu$. Si la condition III est satisfaite, il existe une suite d'entiers positifs croissants $m(\lambda)$, une suite de nombres positifs $\gamma_{m(\lambda)}$ et un élément $b \in A_l^*$ tels que $\gamma_{m(\lambda)}c_{m(\lambda)}\leqslant b$ pour $\lambda=1,2,\dots$ Or, pour $n\leqslant m$ on a $b_n\leqslant c_m$ et, par conséquent, $\beta_n b_n\leqslant b$ pour $n=1,2,\dots$, où $\beta_n=\gamma_{m(\lambda)}$ pour $m(\lambda-1)<n\leqslant m(\lambda)$. La condition II résulte donc de III.

Nous démontrerons enfin que la condition II entraîne I. En effet, supposons que

$$a \in A_l, \quad a^i \in A_l \quad \text{et} \quad a_n^i \in A_l \quad \text{pour} \quad i,n=1,2,\dots$$

et que

$$\lim_{i\to\infty}a^i=a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}a_n^i=a^i.$$

D'après la définition de la convergence, il existe une suite d'éléments non négatifs b_i, où $i=0,1,2,\dots$, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° pour tout entier positif q_0 il existe un entier positif $j(q_0)$ tel que

(3) $$q_0|a^i-a|\leqslant b_0, \quad \text{lorsque} \quad i\geqslant j(q_0);$$

2° pour tout nombre positif q_i il existe un entier positif $m(i,q_i)$ tel que

(4) $$q_i|a_n^i-a^i|\leqslant b_i, \quad \text{lorsque} \quad n\geqslant m(i,q_i).$$

Si la condition II est remplie, on tire de (1), (3) et (4), en posant $i(\lambda)=j(\lambda)$ et $n(\lambda)=m(i(\lambda),\lambda/\beta_{i(\lambda)})$,

$$\lambda|a_{n(\lambda)}^{i(\lambda)}-a|\leqslant b_0+b \quad \text{pour} \quad \lambda=1,2,\dots,$$

d'où la proposition I.

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à remarquer que la condition II entraîne la condition IV; cela est immédiat.

Remarque. La démonstration que nous venons de donner ici n'est pas applicable au cas de l'espace A de J. G.-Mikusiński. Le problème analogue pour cet espace reste ouvert.

Exemples. On peut démontrer que les espaces[3]) des fonctions: 1° continues, 2° p-sommables et 3° mesurables sur un intervalle donné (fermé ou ouvert), sont topologiques. La somme et le module des fonctions sont à entendre, dans ces interprétations, au sens ordinaire.

Pour donner l'exemple d'un espace qui n'est pas topologique, considérons l'ensemble de toutes les fonctions (mesurables et non mesurables) finies dans l'intervalle $[0,1]$ avec les définitions de tout à l'heure de la somme et du module. Nous démontrerons, par exemple, que la condition II n'est pas remplie. En effet, posons

$$f_1(x)=\begin{cases} i & \text{pour} \quad \dfrac{3}{4\cdot 2^i}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2^i}, \quad i=1,2,\dots,\\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } x,\end{cases}$$

et

$$f_{n+1}(x)=\begin{cases} f_n\left(4\cdot 2^i\left(x-\dfrac{3}{4\cdot 2^i}\right)\right) & \text{pour} \quad \dfrac{3}{4\cdot 2^i}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2^i}, \quad i=1,2,\dots\\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } x.\end{cases}$$

---

[3]) Ces espaces sont considérés par M. J. G.-Mikusiński dans sa note précitée.

Si l'on avait $\beta_k f_k(x) \leqslant g(x)$, où $g(x) \geqslant 0$, il existerait évidemment une suite décroissante d'intervalles fermés δ_k contenus dans $[0,1]$ tels que

$$f_k(x) \geqslant \frac{k}{\beta_k} \quad \text{dans} \quad \delta_k, \quad \text{pour} \quad k=1,2,...$$

En désignant par x_0 un point commun des intervalles δ_k, on aurait alors $g(x_0) \geqslant k$ pour $k=1,2,...$, ce qui est impossible.

Un exemple plus simple, mais moins naturel, fournit l'ensemble des fonctions continues dans l'intervalle $(0,1)$ sauf un nombre fini de points au plus [4]). La suite

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n} - x\right)^2}$$

montre alors que la condition II n'est pas remplie.

[4]) Je dois cet exemple à M. Cz. Ryll-Nardzewski.

On a characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring [1]).

By

Leopoldo Nachbin (Rio de Janeiro).

In this note we shall characterize the ordered system of all ideals of a Boolean ring. This question is related to the corresponding problem for lattices which was previously considered by A. Komatu and more recently by G. Birkhoff and O. Frink [2]).

A *sup-lattice* is an ordered set S such that $x \vee y$ has a meaning for any two $x, y \in S$. An *ideal* over S is a set $I \subset S$ such that $x \in S$, $y \in I$, $x \leqslant y$ imply $x \in I$, and $x, y \in I$ imply $x \vee y \in I$. The set $\mathfrak{J}(S)$ of all ideals over S ordered by set inclusion is a complete lattice. The first and last elements of $\mathfrak{J}(S)$ are the empty set $\emptyset$ and S. If $\{I_\lambda\}$ is a non-empty family of ideals over S, then $\bigwedge_\lambda I_\lambda$ is the set intersection and $\bigvee_\lambda I_\lambda$ is the set of all $x \in S$ for which there exist a finite non-empty family $\{\lambda_i\}$ and $x_i \in I_{\lambda_i}$ such that $x \leqslant \bigvee_i x_i$. If $x \in S$, the set $I(x)$ of all $y \in S$, $y \leqslant x$ is called the *principal* ideal generated by x. Denoting the set of all principal ideals by S^*, we have a natural isomorphism $S \to S^*$. It is clear that $I(x_1 \vee x_2) = I(x_1) \vee I(x_2)$. If, in addition, S is a lattice then $I(x_1 \wedge x_2) = I(x_1) \wedge I(x_2)$.

If L is a complete lattice and $x \in L$, then x is said to be *compact* if, for any non-empty family $\{x_\lambda\} \subset L$ such that $x \leqslant \bigvee_\lambda x_\lambda$, there exists a finite non-empty subfamily $\{x_{\lambda_i}\}$ such that $x \leqslant \bigvee_i x_{\lambda_i}$. Clearly the first element of L is compact.

[1]) Presented to the American Mathematical Society, October 30, 1948 at the New York City meeting.

[2]) A. Komatu, *On a characterization of join homomorphic transformation-lattice*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol. 19 (1943), pp. 119-124; G. Birkhoff and O. Frink Jr., *Representations of lattices by sets*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. **64** (1948), to appear.