Une inégalité équivalente à (4) figure dans la théorie de Kantorovitch, comme une condition nécessaire et suffisante de la convergence dans l'espace Y qui est assujetti aux axiomes I, II, III, IV, V et VI. Dans la note présente, l'inégalité (4) a été cependant employée comme définition de la convergence. Ceci permet évidemment d'embrasser, entre autres, les suites à termes complexes.

La *norme de Banach* peut être considérée comme un cas particulier du module défini dans l'espace A_l. En effet, étant donné un espace de Banach, prenons l'un quelconque de ses éléments, soit c, et posons généralement $|a| = \|a\| \cdot c$, où $\|a\|$ est la norme de a. A^* sera alors l'ensemble des éléments de la forme λc, où λ est un nombre non négatif.

Sur certaines inégalités dans les espaces abstraits de J. G.-Mikusiński.

Par

Adam Bielecki (Lublin).

1. Nous nous occuperons ici d'une propriété du module introduit par J. G.-Mikusiński dans son travail *Sur certains espaces abstraits* [1]).

Dans certains raisonnements il est important de savoir si l'inégalité

$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \tag{1}$$

a lieu dans les espaces considérés. Nous verrons que la réponse sera positive dans le cas de l'espace A_l et négative dans celui de l'espace A. Or dans certaines applications l'inégalité (1) peut être remplacée avec succès par les inégalités plus faibles

$$||a|-|b|| \leqslant 3|a \pm b| \tag{2}$$

et

$$|2|a|-2|b|| \leqslant 2|a \pm b|. \tag{3}$$

qui sont vraies dans les espaces A et A_l.

2. Nous démontrerons tout d'abord le lemme suivant:

Si $a \in A$, $b \in A^*$, $a \leqslant b$ *et* $-a \leqslant b$, *on a*

$$|a| \leqslant 3b \quad \textit{et} \quad |2a| \leqslant 2b. \tag{4}$$

En effet, posons $b-a=c$ et $b+a=d$. On a $c \in A^*$, $d \in A^*$ et $c+d=2b$. Il en résulte, d'après les axiomes [2]) adoptés, que l'on a

$$|a| \leqslant |b| + |c| = b + c \leqslant b + c + d = 3b$$

et

$$|2a| = |d-c| \leqslant d + c = 2b,$$

d'où le lemme.

[1]) Ce volume, p. 128.

[2]) Loco cit.

Cela posé, admettons que les éléments a et b appartiennent à l'espace A. D'après la loi du triangle nous avons

$$|a|-|b|\leqslant|b\pm a| \quad \text{et} \quad -(|a|-|b|)\leqslant|b\pm a|$$

et nous en obtenons, en vertu du lemme, les inégalités (2) et (3). Comme les axiomes de l'espace A_l entraînent ceux de l'espace A, les inégalités (2) et (3) sont *a fortiori* vraies dans A_l. Or, il est évident que dans A_l l'inégalité (3) entraîne (1).

3. Soit A l'ensemble des nombres entiers, où l'addition est entendue au sens ordinaire. On convient que A^* se compose de nombres $0,2,3,4,\ldots$ et l'on admet que $|\pm 1|=5$ et $|\pm n|=n$ pour $n=0,2,3,4,\ldots$ Les axiomes de l'espace sont remplis. Or, la différence $|4-1|-||4|-|1||=3-5=-2$ n'appartient pas à A^*; l'inégalité (1) n'est donc pas satisfaite en général. Cet exemple, du à J. G.-Mikusiński, montre de plus qu'il n'est pas généralement possible de remplacer dans l'inégalité (2) le coefficient 3 par 2. En effet, $2|4-1|-||4|-|1||=6-5=1$.

4. Voici encore deux propositions qui résultent immédiatement de l'inégalité (2):

Proposition 1. *Si* $a, a_\nu \in A$, *où* $\nu=1,2,\ldots$ *et* $\lim a_\nu = a$, *on a* $\lim|a_\nu|=|a|$.

Proposition 2. *Si l'espace* A *est complet, l'ensemble* A^* *des élements non négatifs l'est aussi.*

Sur quelques conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace A_l de J. G.-Mikusiński soit topologique au sens de Kuratowski.

Par

Adam Bielecki (Lublin).

Soit E un ensemble contenu dans un espace A_l[1]); nous entendrons par fermeture de E l'ensemble $\overline{E}$ de tous les éléments de A_l qui sont des limites des suites convergentes formées d'éléments de E.

Théorème. *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que l'espace* A_l *satisfasse aux 3 axiomes topologiques de Kuratowski*[2]):

I. *Si* a, a^i, a^i_n $(i,n=1,2,\ldots)$, *sont des éléments de l'espace* A_l *et si l'on a*

$$\lim_{i\to\infty} a^i = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} a^i_n = a^i,$$

il existe alors deux suites d'entiers positifs $i(\lambda)$ *et* $n(\lambda)$ *telles que* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} a^{i(\lambda)}_{n(\lambda)} = a$.

II. *Si* b_n, $(n=1,2,\ldots)$, *est une suite d'éléments non négatifs* (c'est-à-dire appartenant à A_l^*) *de l'espace* A_l, *il existe une suite de nombres positifs* β_n *et un élément non négatif* b *de l'espace* A_l *tels que l'on a*

(1) $$\beta_n b_n \leqslant b \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

III. *Toute suite d'éléments non négatifs de* A_l *contient une suite partielle remplissant la condition* II.

---

[1]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur certains espaces abstraits*, ce volume, p. 128.

[2]) (I) $\overline{E_1+E_2}=\overline{E}_1+\overline{E}_2$,

(II) si E ne contient qu'un seul point ou n'en contient aucun, on a $\overline{E}=E$,

(III) $\overline{\overline{E}}=\overline{E}$.

C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matemat. **20**, Warszawa—Wrocław 1948.